# KELENGKAPAN PADA RUANG METRIK KOMPLEKS

**STEVEN**

**H1011191003**

**SKRIPSI**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS TANJUNGPURA**

**PONTIANAK**

**2024**

# KELENGKAPAN PADA RUANG METRIK KOMPLEKS

**STEVEN**

**H1011191003**

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar

Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS TANJUNGPURA**

**PONTIANAK**

**2024**

## LEMBAR PENGESAHAN

| | |
|---|---|
| Judul Tugas Akhir | : Kelengkapan pada Ruang Metrik Kompleks |
| Nama Mahasiswa | : Steven |
| NIM | : H1011191003 |
| Jurusan/Program Studi | : Matematika/Matematika |
| Tanggal Lulus | : 2 Oktober 2024 |
| SK Pembimbing | : No. 2644/UN22.8/TD.06 /2024/Tanggal 2 September 2024 |
| SK Penguji | : No. 2974/UN22.8/TD.06/2024/Tanggal 27 September 2024 |

Dosen Pembimbing

| Pembimbing I | Pembimbing II |
|---|---|
| Yudhi, M.Si | Meliana Pasaribu, M.Sc |
| NIP. 198504072019031004 | NIP. 198710192019032006 |

Dosen Penguji

| Ketua Penguji | Anggota Penguji |
|---|---|
| Dr. Bayu Prihandono, M.Sc | Dr. Nilamsari Kusumastuti, M.Sc |
| NIP. 197911152005011003 | NIP. 198105102005012003 |

| Pimpinan Sidang (merangkap anggota penguji) | Sekretaris Sidang (merangkap anggota penguji) |
|---|---|
| Yudhi, M.Si | Meliana Pasaribu, M.Sc |
| NIP. 198504072019031004 | NIP. 198710192019032006 |

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Dr. Gusrizal, M.Si
NIP. 197108022000031001

## PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Steven

NIM : H1011191003

Program Studi/ Jurusan : Matematika/Matematika

Fakultas : Matematika

dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas Akhir ini mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai ketentuan perundangan tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyatan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, 2 Oktober 2024




Steven

NIM H1011191003

**Kelengkapan pada Ruang Metrik Kompleks**

## Abstrak

Metrik pada $X$ adalah jarak diantara pasangan elemen dalam $X$ yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Suatu himpunan tak kosong $X$ yang dilengkapi dengan suatu metrik $d$, dituliskan dengan $(X, d)$ disebut ruang metrik. Salah satu perluasan dari ruang metrik adalah ruang metrik kompleks $(X, d_c)$. Kelengkapan pada ruang metrik menjamin setiap barisan Cauchy di dalam ruang tersebut akan konvergen ke suatu titik yang juga berada di dalam ruang yang sama. Pada skripsi ini dikaji konsep barisan konvergen, barisan Cauchy, serta dibahas sifat kelengkapan pada ruang metrik kompleks. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji konsep barisan konvergen, barisan Cauchy, dan menganalisis kekonvergenan dari barisan Cauchy pada ruang metrik kompleks. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yaitu dengan membaca literatur yang berhubungan dengan ruang metrik dan sifat kelengkapan pada ruang metrik kompleks. Hasil dari penelitian ini diperoleh bahwa setiap barisan Cauchy ruang metrik kompleks konvergen sehingga bisa disebut ruang metrik kompleks lengkap.

**Kata Kunci:** jarak, barisan konvergen, barisan Cauchy.

***Completeness in Complex Metric Spaces***


## Abstract

Metrics on $X$ is the distances between pairs of elements in $X$ that satisfy certain properties. A non-empty set $X$ with a metric d, denoted as $(X, d)$, is called a metric space. Completeness in a metric space ensures that every Cauchy sequence within the space will converge to a point that also lies within the same space. In this thesis, the concepts of convergent sequences and Cauchy sequences are studied, and the completeness property in complex metric spaces is discussed. This research aims to examine the concepts of convergent sequences and Cauchy sequences, and to analyze the convergence of Cauchy sequences in complex metric spaces. The method used in this research is a literature study, conducted by reviewing literature related to metric spaces and the completeness property in complex metric spaces. The results of this research demonstrate that every Cauchy sequence in a complex metric space converges, thereby it can be referred to as a complete complex metric space.



***Keywords:*** *distance, convergent sequence, Cauchy sequence.*

# PRAKATA

Puji dan syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Kelengkapan pada Ruang Metrik Kompleks". Penyusunan skripsi ini bertujuan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Orang tua tercinta yang telah memberikan doa dan dukungannya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.
2. Ibu Mariatul Kiftiah, S.Si., M.Sc., Bapak Yudhi, S.Si., M.Si., dan Ibu Meliana Pasaribu, S.Pd., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing skripsi yang selalu memberikan dukungan dan motivasi selama proses penulisan skripsi ini.
3. Ibu Mariatul Kiftiah, S.Si., M.Sc. dan Ibu Dr. Evi Noviani, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan masukan dan nasihat selama perkuliahan.
4. Bapak Dr. Bayu Prihandono, M.Sc. selaku Dosen Penguji pertama yang telah memberikan masukkan dan saran dalam penulisan skripsi ini.
5. Ibu Dr. Nilamsari Kusumastuti, M.Sc. selaku Dosen Penguji Kedua yang telah memberikan masukkan dan saran dalam penulisan skripsi ini.

Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan kontribusi bagi kemajuan pendidikan khususnya di bidang matematika. Kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat diharapkan untuk memaksimalkan skripsi ini

Pontianak, 2 Oktober 2024

Steven

## DAFTAR ISI

**LEMBAR PENGESAHAN ..... ii**
**Abstrak ..... iv**
**Abstract ..... v**
**PRAKATA ..... vi**
**DAFTAR ISI ..... vii**
**DAFTAR SIMBOL ..... viii**
**BAB I PENDAHULUAN ..... 1**
1.1 Latar Belakang ..... 1
1.2 Rumusan Masalah ..... 2
1.3 Tujuan Penelitian ..... 2
1.4 Batasan Masalah ..... 2
1.5 Tinjauan Pustaka ..... 2
1.6 Metodologi Penelitian ..... 3
**BAB II LANDASAN TEORI ..... 6**
2.1 Ruang Metrik ..... 6
2.2 Kedudukan Titik pada Ruang Metrik ..... 12
2.3 Bilangan Kompleks ..... 12
2.4 Urutan Parsial pada Bilangan Kompleks ..... 14
**BAB III KELENGKAPAN PADA RUANG METRIK KOMPLEKS ..... 16**
3.1 Ruang Metrik Kompleks ..... 16
3.2 Kedudukan Titik pada Ruang Metrik Kompleks ..... 18
3.3 Barisan pada Ruang Metrik Kompleks ..... 20
**BAB IV KESIMPULAN ..... 26**
**DAFTAR PUSTAKA ..... 27**

## DAFTAR SIMBOL

| | | |
|---|---|---|
| $(X, d)$ | : | Suatu himpunan tak kosong $X$ yang dilengkapi dengan suatu metrik $d$ |
| $\mathbb{N}$ | : | Himpunan Semua Bilangan asli |
| $\mathbb{R}$ | : | Himpunan Semua Bilangan real |
| $\mathbb{C}$ | : | Himpunan Semua Bilangan kompleks |
| $(X, d_c)$ | : | Suatu himpunan tak kosong $X$ yang dilengkapi dengan suatu metrik kompleks $d_c$ |
| $\prec, \preccurlyeq$ | : | Urutan parsial pada $\mathbb{C}$ |

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Ruang metrik pertama kali ditemukan pada tahun 1906 oleh Maurice Frechet. Metrik atau jarak pada $X$ adalah jarak diantara pasangan elemen $x, y \in X$ yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Suatu himpunan tak kosong $X$ yang dilengkapi dengan suatu metrik $d$, dituliskan dengan $(X, d)$ disebut ruang metrik (Darmawijaya, 2007).

Barisan Cauchy ini diformulasikan oleh matematikawan Prancis, Augustin-Louis Cauchy, sebagai suatu instrumen untuk menguji sifat konvergensi suatu barisan secara internal tanpa harus bergantung pada informasi mengenai nilai titik limitnya terlebih dahulu (Darmawijaya, 2007). Secara intuitif, suatu barisan elemen dikatakan sebagai barisan Cauchy jika suku-suku di dalam barisan tersebut bergerak semakin rapat dan saling mendekat satu sama lain tanpa batas seiring dengan meningkatnya indeks barisan (Cohen, 2003).

Kelengkapan pada suatu ruang metrik merupakan karakteristik utama yang menjamin setiap barisan Cauchy di dalam ruang tersebut akan konvergen ke suatu titik yang juga berada di dalam ruang yang sama. Dalam ruang metrik kelengkapan menjadi sangat penting karena menentukan apakah ruang tersebut memiliki struktur yang utuh tanpa adanya celah atau kekosongan. Jika suatu ruang metrik kompleks tidak lengkap, maka terdapat barisan Cauchy yang tidak memiliki limit di dalam ruang tersebut.

Barisan pada ruang metrik dapat ditentukan kekonvergenannya dengan cara mencari nilai limit dari barisan tersebut. Barisan dikatakan konvergen jika barisan tersebut mempunyai limit dan dikatakan divergen jika tidak mempunyai titik limit. Jika suatu barisan dalam ruang metrik merupakan barisan yang konvergen maka barisan tersebut merupakan barisan Cauchy, namun tidak berlaku untuk sebaliknya (Cohen, 2003). Suatu ruang metrik dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy di dalamnya barisan tersebut konvergen.

Pada buku Darmawijaya, (2007) yang berjudul Pengantar Analisis Abstrak dibahas tentang pengertian dasar ruang metrik, kedudukan titik, dan barisan pada ruang bilangan Real. Ruang metrik kompleks merupakan perluasan dari ruang metrik bilangan Real. Pada tahun 2011, ruang metrik bernilai kompleks pertama kali diperkenalkan oleh Azam. Dalam penelitiannya dibahas keberadaan titik tetap pada pemetaan diruang metrik bernilai kompleks. Namun penelitian terkait kelengkapan ruang metrik kompleks belum banyak diteliti lebih lanjut. Oleh karena itu dalam skripsi ini dibahas tentang sifat kelengkapan pada ruang metrik kompleks. Dalam menguji suatu kelengkapan pada ruang metrik diperlukan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan barisan ruang metrik kompleks. Dari definisi dan teorema yang diberikan akan dikaji lebih lanjut tentang kelengkapan pada ruang metrik kompleks.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan, permasalahan yang dibahas pada penelitian ini adalah kelengkapan pada ruang metrik kompleks.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, adapun tujuan dalam penelitian ini adalah

1. Mengkaji konsep barisan konvergen pada ruang metrik kompleks.
2. Mengkaji konsep barisan Cauchy pada ruang metrik kompleks.
3. Menganalisis kekonvergenan dari barisan Cauchy pada ruang metrik kompleks.

## 1.4 Batasan Masalah

Untuk membuat pembahasan menjadi terarah dan tidak meluas, penelitian dibatasi pada kajian kelengkapan ruang metrik kompleks, dengan penekanan pada definisi ruang metrik kompleks dan sifat-sifat yang mempengaruhi kelengkapan.

## 1.5 Tinjauan Pustaka

Beberapa penelitian terkait ruang metrik kompleks telah dikaji. Referensi buku yang digunakan sebagai materi pendukung dalam penelitian ini antara lain

buku “Pengantar Analisis Abstrak” yang berisi tentang ruang metrik beserta barisan di ruang metrik dan contohnya, dan pengertian dasar ruang Banach.

Dalam artikel yang ditulis oleh Singh, (2016) dibahas tentang teorema titik tetap pada ruang metrik bernilai kompleks. Dalam penelitian tersebut, diperkenalkan konsep ruang metrik kompleks yang merupakan perluasan dari konsep ruang metrik. Dalam jurnal tersebut juga dijelaskan tentang urutan parsial pada himpunan bilangan Kompleks.

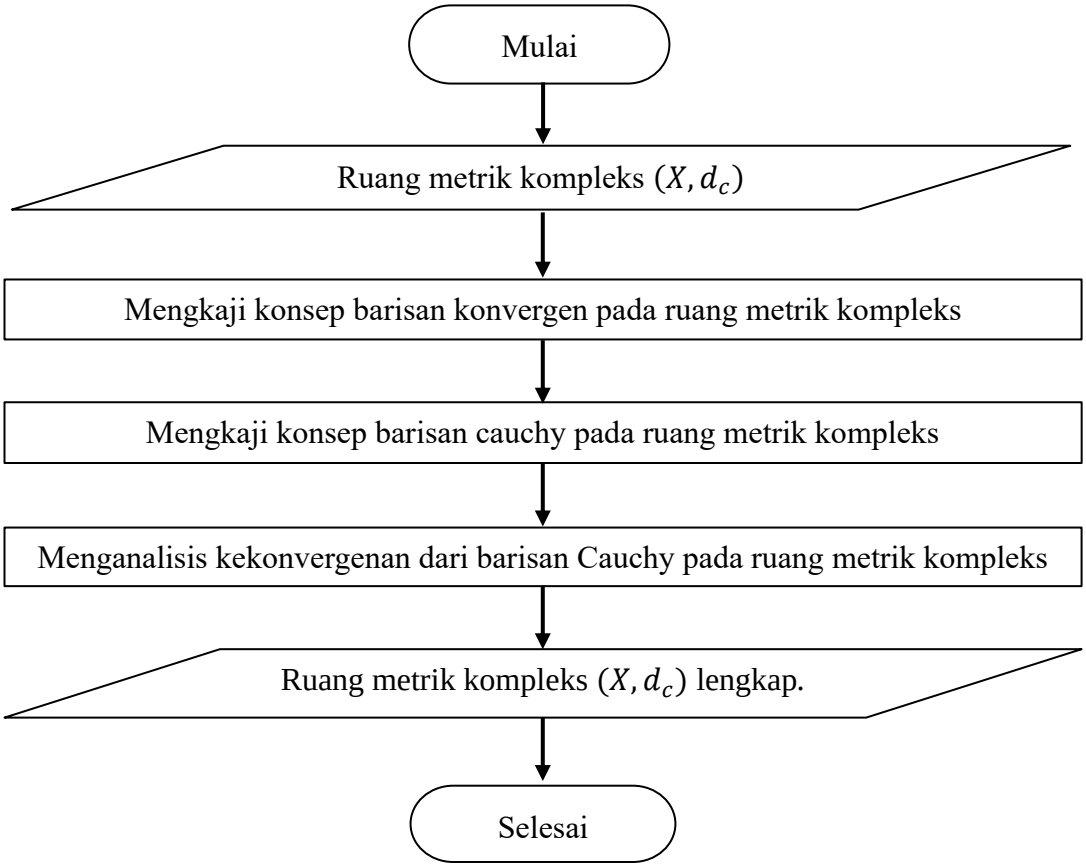
Penelitian yang dilakukan oleh Azam, (2011) dibahas tentang ruang metrik kompleks. Didefinisikan suatu ruang metrik yang dipetakan ke bilangan kompleks dan jika setiap barisan Cauchy yang konvergen maka bisa disebut ruang metrik kompleks lengkap.

Pada tahun 2021, penelitian yang dilakukan oleh Ansar dibahas tentang eksistensi dan ketunggalan titik tetap persekutuan dari pemetaan C-kontraktif lemah yang diperumum pada ruang metrik parsial kompleks. Dalam artikel ini dipaparkan beberapa teorema terkait ruang metrik kompleks dan ruang metrik parsial kompleks sebagai dasar dalam membuktikan teorema titik tetap.

## 1.6 Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yaitu dengan membaca literatur yang berhubungan dengan ruang metrik dan sifat kelengkapan pada ruang metrik kompleks. Literatur tersebut merupakan teori yang bersumber dari buku maupun artikel-artikel.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mendefinisikan ruang metrik kompleks $d_c(x, y)$. Selanjutnya dikaji barisan pada ruang metrik kompleks. Diberikan $(X, d_c)$ ruang metrik kompleks dan $\{x_n\}$ barisan pada $X$. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $c \in \mathbb{C}, 0 \prec c$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan $n > n_0$ berlaku $d_c(x_n, x) \prec c$. Ditulis $x_n \to x$. Barisan yang konvergen didalam ruang metrik kompleks disebut barisan Cauchy. Untuk setiap barisan Cauchy yang konvergen di dalam ruang metrik kompleks, maka ruang metrik kompleks tersebut dikatakan lengkap. Langkah-langkah dalam membangun konsep barisan pada ruang metrik kompleks disajikan pada *flowchart* di bawah ini.




**Gambar 1.1** *Flowchart* menentukan ruang metrik kompleks $(X, d_c)$ lengkap.