KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE DI KALIMANTAN BARAT MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

OKTAVIA ARNELLIZA AYU
H1011211031

SKRIPSI

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE DI KALIMANTAN BARAT MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

OKTAVIA ARNELLIZA AYU
H1011211031

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

LEMBAR PENGESAHAN

Judul Tugas Akhir	: Kontrol Optimal Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Kalimantan Barat Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin
Nama Mahasiswa	: Oktavia Arnelliza Ayu
NIM	: H1011211031
Jurusan/Program Studi	: Matematika/Matematika
Tanggal Lulus	: 21 April 2025
SK Pembimbing	: No. 2558/UN22.8/TD.06/2024/Tanggal 2 September 2024
SK Penguji	: No. 1070/UN22.8/TD.06/2025/Tanggal 10 April 2025

Dosen Pembimbing

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc.	Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc.
NIP 197911152005011003	NIP 198105102005012003

Dosen Penguji

Ketua Penguji	Anggota Penguji
Dr. Evi Noviani, M.Si., CFrA.	Yudhi, S.Si., M.Si.
NIP 198402292006042001	NIP 198504072019031004

Pimpinan Sidang (merangkap anggota penguji)	Sekretaris Sidang (merangkap anggota penguji)
Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc	Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc
NIP 197911152005011003	NIP 198105102005012003

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Prof. Dr. Gusrizal, M.Si.
NIP 197108022000031001

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Oktavia Arnelliza Ayu
NIM	: H1011211031
Program Studi/Jurusan	: Matematika/Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas Akhir ini mengandung unsur pelanggaran integritas akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyataan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya

Pontianak, Januari 2025



Oktavia Arnelliza Ayu

NIM H1011211031

Kontrol Optimal Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Kalimantan Barat Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin

Abstrak

Demam berdarah dengue (DBD) adalah salah satu masalah kesehatan yang utama pada beberapa provinsi di Indonesia, salah satunya adalah provinsi Kalimantan Barat. Penyebaran penyakit DBD akan meningkat ketika musim hujan dikarenakan nyamuk Aedes Aegypti sebagai vektor penyebaran penyakit utamanya akan bertelur dan menetaskan telurnya pada genangan air sehingga menjadi larva nyamuk. Penyebaran penyakit DBD dapat dikendalikan dengan pemberian larvasida (u_1) dan gerakan 3M (menguras, menutup, mengubur wadah penampungan air) (u_2) untuk mengurangi populasi manusia yang terinfeksi dan populasi nyamuk yang terinfeksi. Pada penelitian ini, model epidemi dibagi menjadi enam subpopulasi yaitu *Susceptible Host* (S_h), *Infected Host* (I_h), *Recovered Host* (R_h), *Aquatic phase* (A_v), *Susceptible vector* (S_v) dan *Infected vector* (I_v). Dari keenam subpopulasi tersebut kemudian dibentuk model epidemi dengan pemberian kontrol. Selanjutnya dilakukan penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan metode prinsip minimum Pontryagin sehingga didapat suatu kontrol optimal u_1^* dan u_2^*. Selanjutnya dilakukan penyelesaian solusi numerik dengan metode Sweep Maju-Mundur Runge Kutta orde empat dengan bantuan software *Python*. Berdasarkan hasil analisis dan simulasi menunjukkan bahwa tanpa pengendalian, penyebaran penyakit DBD antara manusia dan nyamuk berlangsung cepat, dengan peningkatan tajam pada populasi yang terinfeksi. Dengan penerapan langkah pengendalian seperti gerakan 3M dan penggunaan larvasida (abate) terbukti efektif dalam menekan jumlah manusia dan nyamuk yang terinfeksi hingga menurun sangat rendah sepanjang waktu simulasi. Pengendalian ini berhasil memutus siklus penularan infeksi, mencegah lonjakan kasus, dan mengurangi risiko penyebaran penyakit secara signifikan.

Kata Kunci: Kontrol Optimal, Model Penyakit DBD, Prinsip Minimum Pontryagin, Metode Runge Kutta orde 4.

Optimal Control of the Dengue Fever Disease Spread Model in West Kalimantan Using Pontryagin Minimum Principle

Abstract

Dengue hemorrhagic fever (DHF) is one of the major health problems in several provinces in Indonesia, one of which is the province of West Kalimantan. The spread of DHF will increase during the rainy season because the Aedes Aegypti mosquito as the main vector of disease spread will lay eggs and hatch their eggs in stagnant water so that they become mosquito larvae. The spread of DHF disease can be controlled by administering larvicides (u_1) and the 3M movement (drain, cover, bury water storage containers) (u_2) to reduce the infected human population and the infected mosquito population. In this study, the epidemic model is divided into six subpopulations namely Susceptible Host (S_h), Infected Host (I_h), Recovered Host (R_h), Aquatic phase (A_v), Susceptible vector (S_v) and Infected vector (I_v). From the six subpopulations, an epidemic model is then formed by providing control. Then the optimal control is solved using the Pontryagin minimum principle method so that an optimal control u_1^* and u_2^* is obtained. Furthermore, the numerical solution is solved using the fourth-order Sweep Forward-Backward Runge Kutta method with the help of Python software. Based on the analysis and simulation results, it is shown that without control, the spread of dengue disease between humans and mosquitoes is rapid, with a sharp increase in the infected population. The implementation of control measures such as the 3M movement and the use of larvicide (abate) proved effective in reducing the number of infected humans and mosquitoes to a very low level throughout the simulation time. This control successfully breaks the cycle of infection transmission, prevents spikes in cases, and significantly reduces the risk of disease spread.

***Keywords**: Optimal Control, Dengue Disease Model, Pontryagin Minimum Principle, 4th order Runge Kutta Method.*

PRAKATA

Puji dan syukur penulis haturkan ke hadirat Tuhan Yesus Kristus yang atas kasih karunia dan penyertaan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Kontrol Optimal Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Kalimantan Barat Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu penulis dalam berbagai bentuk. Oleh karena itu, penulis berterima kasih kepada:

1. Keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
2. Bapak Dr. Bayu Prihandono, M.Sc. sebagai Dosen Pembimbing pertama dan Ibu Dr. Nilamsari Kusumastuti, M.Sc. sebagai Dosen Pembimbing kedua dalam penulisan skripsi ini, atas bimbingan dan masukan kepada penulis.
3. Ibu Dr. Evi Noviani, M.Si. sebagai Dosen Penguji pertama dan Bapak Yudhi, M.Si. sebagai Dosen Penguji kedua dalam penulisan skripsi ini, yang telah memberikan kritik dan saran.
4. Ibu Nur'ainul Miftahul Huda, M.Si. sebagai Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama masa studi penulis.
5. Seluruh dosen di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah membimbing dan memberikan ilmu selama masa perkuliahan.
6. Sahabat-sahabat penulis dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi pihak-pihak yang membutuhkan dan dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, Januari 2025

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

LEMBAR PENGESAHAN ..... Error! Bookmark not defined.
PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK ..... Error! Bookmark not defined.
Abstrak ..... **iv**
Abstract ..... **v**
PRAKATA ..... **vi**
DAFTAR ISI ..... **vii**
DAFTAR TABEL ..... **ix**
DAFTAR GAMBAR ..... **x**
DAFTAR SIMBOL ..... **xi**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Batasan Masalah 4
1.5 Tinjauan Pustaka 4
1.6 Metodologi Penelitian 8
BAB II LANDASAN TEORI **10**
2.1 Sistem Persamaan Diferensial 10
2.2 Teori Kontrol Optimal 11
2.2.1 Persamaan State dan Variabel Kontrol 11
2.2.2 Fungsi Tujuan 12
2.2.3 Formulasi Kontrol Optimal dan Fungsi Hamiltonian 14
2.3 Keterkendalian Sistem Dinamik 14
2.3.1 Eksistensi Kontrol Optimal 14
2.3.2 Prinsip Minimum Pontryagin 15
2.3.3 Ketunggalan Kontrol Optimal 19
2.4 Pendekatan Taylor Orde Pertama 19
2.5 Metode Runge Kutta Orde 4 20
2.6 Metode Sweep Maju-Mundur 21
BAB III MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DBD **22**
3.1 Asumsi Dasar Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD 22
3.2 Variabel dan Parameter Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD 23

3.3 Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue 25
BAB IV KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN DBD 33
4.1 Eksistensi Kontrol Optimal 33
4.2 Penyelesaian Kontrol Optimal 36
4.3 Ketunggalan Kontrol Optimal 42
4.4 Simulasi Numerik Pada Model Matematika 44
4.4.1 Algoritma Sweep Maju Mundur 45
4.4.2 Analisis Simulasi Numerik 46
BAB V PENUTUP 51
5.1 Kesimpulan 51
5.2 Saran 52
DAFTAR PUSTAKA 53
LAMPIRAN 56

DAFTAR TABEL

Tabel 3. 1 Variabel Model Penyebaran Penyakit DBD 23
Tabel 3. 2 Parameter Model Penyebaran Penyakit DBD 23
Tabel 4. 1 Nilai Awal Simulasi Numerik 45
Tabel 4. 2 Nilai Parameter 46

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1 Flowchart kontrol optimal pada penyebaran penyakit DBD 9
Gambar 3. 1 Diagram Transfer Penyebaran DBD Pada Populasi Manusia 26
Gambar 3. 2 Diagram Transfer Penyebaran DBD Pada Populasi Nyamuk 28
Gambar 3. 3 Diagram Transfer Proses Penyebaran Penyakit DBD 31
Gambar 4. 1 Grafik populasi manusia yang terinfeksi tanpa dan adanya kontrol 48
Gambar 4. 2 Grafik populasi nyamuk yang terinfeksi tanpa dan adanya kontrol 49
Gambar 4. 3 Grafik kontrol pemberian larvasida $(u1)$ dan gerakan 3M $(u2)$..... 50
Gambar 4. 4 Grafik Fungsi Tujuan..... 50

DAFTAR SIMBOL

$\frac{dS_h}{dt}$	:	Laju perubahan populasi manusia pada subpopulasi *susceptible* terhadap waktu t (orang per hari)
$\frac{dI_h}{dt}$	:	Laju perubahan populasi manusia pada subpopulasi *infected* terhadap waktu t (orang per hari)
$\frac{dR_h}{dt}$	:	Laju perubahan populasi manusia pada subpopulasi *recovered* terhadap waktu t (orang per hari)
$\frac{dA_v}{dt}$	:	Laju perubahan populasi nyamuk pada subpopulasi *aquatic* (telur, larva dan pupa) terhadap waktu t (ekor per hari)
$\frac{dS_v}{dt}$	:	Laju perubahan populasi nyamuk pada subpopulasi *susceptible* terhadap waktu t (ekor per hari)
$\frac{dI_v}{dt}$	:	Laju perubahan populasi nyamuk pada subpopulasi *infected* terhadap waktu t (ekor per hari)
N_h	:	Jumlah populasi manusia (orang)
A_h	:	Angka kelahiran per kapita manusia (orang per hari)
b	:	Rata-rata jumlah gigitan nyamuk pada manusia (gigitan per nyamuk sebanyak hari)
β_h	:	Tingkat keberhasilan penularan dari nyamuk ke manusia (individu per nyamuk sebanyak hari)
μ_h	:	Tingkat kematian manusia (per hari)
δ_h	:	Laju perubahan dari individu yang telah pulih (R_h) kembali menjadi rentan (S_h) (per hari)
γ_h	:	Tingkat pemulihan manusia (per hari)
ϕ	:	Jumlah rata-rata telur yang dihasilkan oleh nyamuk betina (individu per hari)
k	:	Rasio jumlah larva per manusia (nyamuk per individu)
β_v	:	Tingkat keberhasilan penularan dari manusia ke nyamuk (per nyamuk sebanyak individu dan sebanyak hari)
η_v	:	Tingkat transisi dari fase akuatik (A_v) ke nyamuk (S_v) (per hari)

μ_v	:	Tingkat kematian nyamuk (per hari)
μ_A	:	Tingkat kematian larva (larva per hari)
u_1	:	Tingkat efektivitas penggunaan larvasida (kontrol)
u_2	:	Tingkat efektivitas gerakan 3M (kontrol)
C_1	:	bobot yang berkaitan dengan biaya pengendalian populasi nyamuk pada fase akuatik (larva) (unit kontrol)
C_2	:	Bobot yang berkaitan dengan biaya pemberian larvasida (abate) (unit kontrol)
C_3	:	Bobot yang berkaitan dengan biaya gerakan 3M (unit kontrol)

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Demam Berdarah Dengue (DBD) termasuk jenis penyakit arbovirus yang ditularkan oleh dua jenis vektor nyamuk yaitu *Aedes aegypti* dan *Aedes Albopictus* dan merupakan masalah utama penyakit di negara tropis (Frida, 2020). Penyakit ini telah menyebar ke lebih dari 100 negara, termasuk Indonesia (World Health Organization, 2009). Indonesia memiliki iklim tropis dengan curah hujan yang tinggi, yang berpotensi menyebabkan berbagai penyakit tropis yang dapat disebabkan oleh nyamuk, salah satunya merupakan penyakit demam berdarah dengue (Faozi dkk., 2023). Demam Berdarah adalah suatu kondisi yang ditandai dengan demam tinggi disertai dengan gejala pendarahan, yang dapat disebabkan oleh berbagai faktor seperti infeksi virus (dengue, Hantavirus, Ebola atau Marburg, Arenavirus), bakteri (Leptospirosis), atau gangguan pembekuan darah (Mandell dkk., 2010). Demam berdarah mengacu pada berbagai faktor yang menyebabkan gejala ringan hingga sedang seperti demam tinggi, nyeri otot dan sendi, ruam kulit (Jannah, 2020). Sementara itu, DBD adalah penyakit menular yang ditularkan oleh virus *dengue* dari manusia yang terinfeksi ke nyamuk *aedes aegypti* melalui gigitan. DBD adalah bentuk yang lebih parah dari infeksi dengue, yang ditandai dengan kebocoran plasma, trombositopenia (penurunan jumlah trombosit), dan pendarahan, yang jika tidak ditangani dapat berakibat fatal. DBD menjadi salah satu masalah kesehatan masyarakat yang signifikan di Indonesia, terutama di Provinsi Kalimantan Barat. Menurut data dari Dinas Kesehatan Provinsi Kalimantan Barat, hingga akhir Oktober 2023 tercatat terdapat 4.304 kasus DBD dengan 48 kematian.

Mengingat tingginya kasus demam berdarah dengue serta cepatnya tingkat penyebaran di Provinsi Kalimantan Barat sehingga pengelola kesehatan memerlukan upaya pengendalian yang efektif terhadap penyakit ini. Salah satu langkah utama adalah mengurangi populasi nyamuk yang menjadi vektor penyebaran penyakit demam berdarah dengue. Ada beberapa cara pengendalian yang dapat dilakukan meliputi pemberian larvasida (abate), penyemprotan

insektisida atau fogging, dan penerapan gerakan 3M (Dinata, 2018). Dari berbagai cara pengendalian, upaya paling utama adalah mengendalikan larva nyamuk (Siyam dkk., 2023). Pengendalian larva dicapai dengan menggunakan pemberian larvasida seperti abate, sebaiknya menggunakan bahan kimia yang tahan lama dan aman serta disetujui oleh WHO untuk digunakan dalam air minum (Dinata, 2018). Di Indonesia, program pengendalikan larva dikenal dengan gerakan 3M yaitu menguras, menutup, dan mengubur semua ember atau wadah berisi air yang digunakan nyamuk betina untuk berkembang biak dan bertelur. Larva *aedes aegypti* juga dapat tumbuh pada wadah bekas yang dapat menyimpan air (Ri, 2010). Oleh karena itu, kita harus memastikan bahwa area rumah bebas dari tempat berkembang biaknya nyamuk.

Pengendalian penyakit DBD melalui cara-cara seperti 3M (misalnya menguras, menutup, mengubur wadah penampungan air), dan pemberian larvasida seperti abate terbukti efektif dalam menurunkan populasi nyamuk Aedes aegypti, vektor utama penyakit DBD. Namun efektivitas cara ini seringkali kurang optimal karena masyarakat tidak konsisten menerapkan langkah-langkah tersebut (Siyam dkk., 2022). Oleh karena itu, penerapan teori kontrol optimal penting untuk merancang strategi pengendalian yang lebih efektif. Teori ini memungkinkan pengelola kesehatan mempertimbangkan faktor lingkungan dan perilaku masyarakat untuk menentukan langkah paling efisien dalam menekan populasi nyamuk dan memutus rantai penularan. Pendekatan ini diharapkan dapat mencapai keseimbangan antara intervensi yang dilaksanakan dan respon masyarakat sehingga upaya pengendalian demam berdarah dapat dilakukan lebih berkelanjutan dan tepat sasaran.

Kontrol optimal pada dasarnya bertujuan untuk menemukan variabel kontrol yang dapat menghasilkan solusi optimal pada sistem dinamik yang dipengaruhi oleh kendala tertentu (Qomarudin, 2023). Ini adalah pendekatan matematika terapan yang bertujuan untuk menentukan strategi terbaik yang mengarahkan dinamika suatu sistem untuk mencapai tujuan tertentu dengan meminimalkan atau memaksimalkan fungsi objektif (J).

Kontrol optimal digunakan dalam kasus penyebaran penyakit seperti demam berdarah dalam menentukan upaya yang paling efektif untuk mengurangi laju

infeksi dengan mempertimbangkan biaya yang diperlukan (Utami, 2024). Salah satu metode kontrol optimal yaitu prinsip minimum Pontryagin dimana metode yang mengubah masalah kontrol menjadi masalah kondisi batas menggunakan persamaan diferensial (Yudhi, 2019). Prinsip ini membantu peneliti untuk memperoleh kontrol terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga state akhir, yaitu dengan mengoptimalkan fungsi objektif (J) dengan menggunakan kontrol (u) (Naidu & Naidu, 2003).

Dalam penelitian ini, kontrol optimal diaplikasikan dengan menetapkan dua bentuk kontrol yaitu pemberian larvasida (abate) untuk menekan populasi nyamuk dan penyuluhan program 3M untuk mengurangi tempat perkembiakkan nyamuk (Nur Haidah dkk., 2024). Pemilihan strategi kontrol ini didasarkan pada efektivitasnya dalam menekan populasi nyamuk vektor sejak fase larva dan mengurangi habitat perkembangbiakannya. Pemberian larvasida (abate) langsung menargetkan larva nyamuk dalam tempat penampungan air sehingga mencegahnya berkembang menjadi nyamuk dewasa yang dapat menyebarkan penyakit (Hidayat dkk., 2024). Sementara Gerakan 3M berperan dalam menghilangkan tempat bertelur nyamuk secara berkelanjutan. Selain efektif, kedua metode ini juga mudah diterapkan oleh masyarakat dan lebih ramah lingkungan dibandingkan penggunaan insektisida atau fooging yang menargetkan nyamuk dewasa (Pramudita dkk., 2024). Oleh karena itu, pendekatan berbasis pengendalian vektor melalui larvasida (abate) dan Gerakan 3M dianggap lebih berkelanjutan dan efektif dalam menekan penyebaran DBD di Kalimantan Barat. Prinsip minimum Pontryagin akan digunakan untuk merancang strategi yang menyeimbangkan efektivitas kedua kontrol ini, sehingga mencapai tujuan pengendalian penyebaran DBD di Kalimantan Barat secara optimal.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana mengkaji model matematika dengan penambahan kontrol pencegahan pada penyebaran penyakit DBD dan bagaimana mendapatkan kontrol yang optimal dari model matematika dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Membangun model matematika dengan penambahan kontrol pencegahan pada penyebaran penyakit DBD.
2. Membentuk fungsi tujuan J dan fungsi hamiltonian H dari model matematika penyebaran penyakit DBD.
3. Menganalisis kondisi stasioner kontrol yang optimal dari fungsi hamiltonian H untuk mendapatkan kontrol yang optimal.
4. Merancang simulasi numerik model matematika dengan penambahan kontrol pencegahan pada penyebaran penyakit DBD.

1.4 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, diberikan beberapa batasan agar penyelesaian permasalahan lebih fokus yaitu sebagai berikut

1. Model matematika yang digunakan adalah model epidemi *SIR* untuk populasi manusia yaitu *Susceptible*, *Infected* dan *Recovered* dan juga model *ASI* untuk populasi nyamuk yaitu *Aquatic phase*, *Susceptible vector* dan *Infected vector*.
2. Penyelesaian kontrol optimal pada penelitian ini menggunakan prinsip minimum Pontryagin.
3. Variabel kontrol yang digunakan yaitu pemberian larvasida seperti abate (u_1) dan gerakan 3M (u_2).

1.5 Tinjauan Pustaka

Beberapa penelitian tentang kontrol optimal penyebaran penyakit demam berdarah sudah pernah dilakukan dan dikaji. Literatur pertama yang menjadi acuan dalam penelitian adalah penelitian yang dilakukan oleh Rohman dkk (2018) dalam penelitian yang berjudul "*An Impulse Fumigation Scenario to Control Dengue Spreads*" mengembangkan model matematis untuk mengendalikan penyebaran *dengue* dengan menggunakan intervensi fumigasi. Penelitian ini bertujuan untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi serta meminimalkan biaya intervensi. Model yang diusulkan membagi populasi manusia menjadi empat kompartemen: *susceptible*, *exposed*, *infected*, dan *recovered*. Sementara itu, populasi nyamuk dibagi menjadi empat kompartemen: *aquatic phase*, *susceptible*, *exposed*, dan

infected. Dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin, penelitian ini dapat menentukan karakteristik kontrol optimal yang diperlukan untuk mengurangi penyebaran penyakit. Hasil penelitian menunjukkan bahwa intervensi fumigasi yang direncanakan dengan baik dapat secara signifikan mengurangi jumlah individu yang terinfeksi, baik pada populasi manusia maupun nyamuk. Penelitian ini juga menekankan pentingnya mempertimbangkan biaya dalam implementasi strategi pengendalian, di mana penggunaan kontrol optimal dapat membantu dalam merumuskan intervensi yang efisien dan efektif.

Literatur kedua dalam penelitian ini adalah penelitian yang dilakukan oleh Chamnan dkk (2021) dalam penelitian yang berjudul "*Optimal Control of Dengue Transmission with Vaccination*" mengembangkan model matematis untuk menganalisis pengendalian penyebaran dengue dengan mempertimbangkan strategi vaksinasi. Model ini fokus pada vaksinasi individu yang memiliki riwayat infeksi dengue sebelumnya, sesuai dengan rekomendasi terbaru dari WHO. Penelitian ini menggunakan model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) untuk populasi manusia dan model SI (*Susceptible-Infected*) untuk populasi vektor. Model ini membagi populasi manusia menjadi enam kelompok, termasuk yang rentan terhadap infeksi primer dan sekunder, serta yang telah pulih dari infeksi primer dan sekunder. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik stabil secara lokal asimtotik. Peneliti juga menghitung angka reproduksi dasar (R_0) dan melakukan analisis sensitivitas parameter untuk mengidentifikasi parameter yang memiliki dampak signifikan terhadap R_0. Penelitian ini menerapkan teori kontrol optimal untuk meminimalkan jumlah manusia yang terinfeksi, baik infeksi primer maupun sekunder. Dua parameter kontrol digunakan: u_1 untuk tingkat vaksinasi dan u_2 untuk tingkat pemusnahan tempat berkembang biak nyamuk *Aedes*. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa penerapan kontrol optimal dapat secara signifikan mengurangi jumlah individu yang terinfeksi dibandingkan dengan skenario tanpa kontrol. Penelitian ini juga mengungkapkan bahwa efektivitas kontrol bergantung pada bobot yang diberikan pada infeksi primer dan sekunder dalam fungsi objektif. Penelitian ini memberikan wawasan berharga tentang dinamika penyebaran dengue dan

efektivitas strategi pengendalian, terutama dalam konteks vaksinasi individu dengan riwayat infeksi sebelumnya.

Literatur ketiga dalam penelitian ini adalah penelitian yang dilakukan oleh Khan & Fatmawati (2021) dalam penelitian yang berjudul "*Dengue infection modeling and its optimal control analysis in East Java, Indonesia*" mengembangkan model matematis untuk menggambarkan dinamika infeksi DBD dengan mempertimbangkan kelas rawat inap. Penelitian ini menggunakan data kasus DBD yang dilaporkan di Provinsi Jawa Timur, Indonesia, untuk tahun 2018. Model yang dikembangkan membagi populasi menjadi tiga kelompok nyamuk (rentan, terpapar, dan terinfeksi) dan lima kelompok manusia (rentan, terpapar, terinfeksi, dirawat di rumah sakit, dan pulih). Peneliti mengestimasi angka reproduksi dasar (R_0) untuk kasus yang terinfeksi di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2018 sebesar 1,1138. Analisis stabilitas lokal dan global dilakukan pada titik kesetimbangan bebas penyakit (DFE). Penelitian ini juga mengeksplorasi keberadaan titik kesetimbangan endemik dan kemungkinan terjadinya bifurkasi mundur. Penelitian ini menerapkan teori kontrol optimal dengan dua variabel kontrol yaitu pencegahan (u_1) dan penggunaan insektisida (u_2). Tujuannya adalah untuk meminimalkan jumlah manusia dan vektor yang terinfeksi DBD sambil menjaga biaya implementasi kontrol tetap rendah. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa penerapan kedua strategi kontrol secara bersamaan (pencegahan dan insektisida) merupakan strategi terbaik untuk meminimalkan jumlah inang dan vektor yang terinfeksi DBD dalam populasi. Penggunaan insektisida saja juga terbukti efektif dalam mengurangi transmisi DBD.

Literatur keempat dalam penelitian ini adalah penelitian yang dilakukan oleh Ilmayasinta dkk., (2023) dalam penelitian mereka yang berjudul "*An Optimal Control Analysis of Dengue Fever*" mengembangkan model matematis transmisi demam berdarah dengan mempertimbangkan kelas rawat inap dan tiga strategi kontrol optimal. Model ini terdiri dari delapan kompartemen, termasuk lima populasi manusia (rentan, terpapar, terinfeksi, dirawat di rumah sakit, dan pulih) dan tiga populasi nyamuk (rentan, terpapar, dan terinfeksi). Penelitian ini menerapkan tiga strategi kontrol optimal yaitu Pencegahan (ς_1), seperti

penggunaan kelambu dan obat nyamuk, Penggunaan pestisida (ς_2) , termasuk penyemprotan dan pengasapan serta Vaksinasi (ς_3). Analisis stabilitas dilakukan pada titik kesetimbangan bebas penyakit (DFE). Peneliti juga melakukan analisis sensitivitas global menggunakan metode *Partial Rank Correlation Coefficient* (PRCC) untuk mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh terhadap dinamika penyakit. Hasil analisis sensitivitas menunjukkan bahwa tingkat kematian nyamuk (μ_n) dan probabilitas transmisi dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan (α_m) merupakan parameter yang paling sensitif. Peningkatan tingkat kematian nyamuk dan penurunan probabilitas transmisi dapat secara signifikan mengurangi penyebaran DBD. Simulasi numerik menggunakan MATLAB menunjukkan bahwa penerapan ketiga strategi kontrol optimal secara bersamaan dapat secara signifikan mengurangi jumlah populasi terinfeksi, baik pada manusia maupun nyamuk. Efektivitas kontrol terlihat jelas dalam penurunan populasi terpapar dan terinfeksi, serta penurunan jumlah kasus yang dirawat di rumah sakit.

Literatur kelima dalam penelitian ini adalah penelitian yang dilakukan oleh Al Aziim & Arif, (2022) dalam penelitian yang berjudul "Kontrol Optimal Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah dengan Pengaruh Penyemprotan Insektisida dan Pengobatan" mengembangkan model matematis untuk menganalisis penyebaran dan pengendalian DBD. Model ini mempertimbangkan populasi manusia dan nyamuk, dengan fokus pada dinamika transmisi penyakit dan efektivitas strategi pengendalian. Analisis kestabilan dilakukan pada model tersebut, menghasilkan dua titik kesetimbangan: titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Kedua titik kesetimbangan ini bersifat stabil asimtotik, menunjukkan bahwa sistem akan cenderung menuju salah satu dari dua kondisi ini dalam jangka panjang, tergantung pada parameter-parameter model. Peneliti menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin untuk mendapatkan kontrol optimal. Dua jenis kontrol dipertimbangkan yaitu penyemprotan insektisida (u_1) dan pengobatan individu manusia yang terinfeksi (u_2). Kontrol optimal u_1^* dan u_2^* diperoleh melalui perhitungan matematis yang melibatkan variabel-variabel *state* dan *costate* dari sistem. Simulasi numerik dilakukan untuk membandingkan efektivitas strategi pengendalian. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penerapan

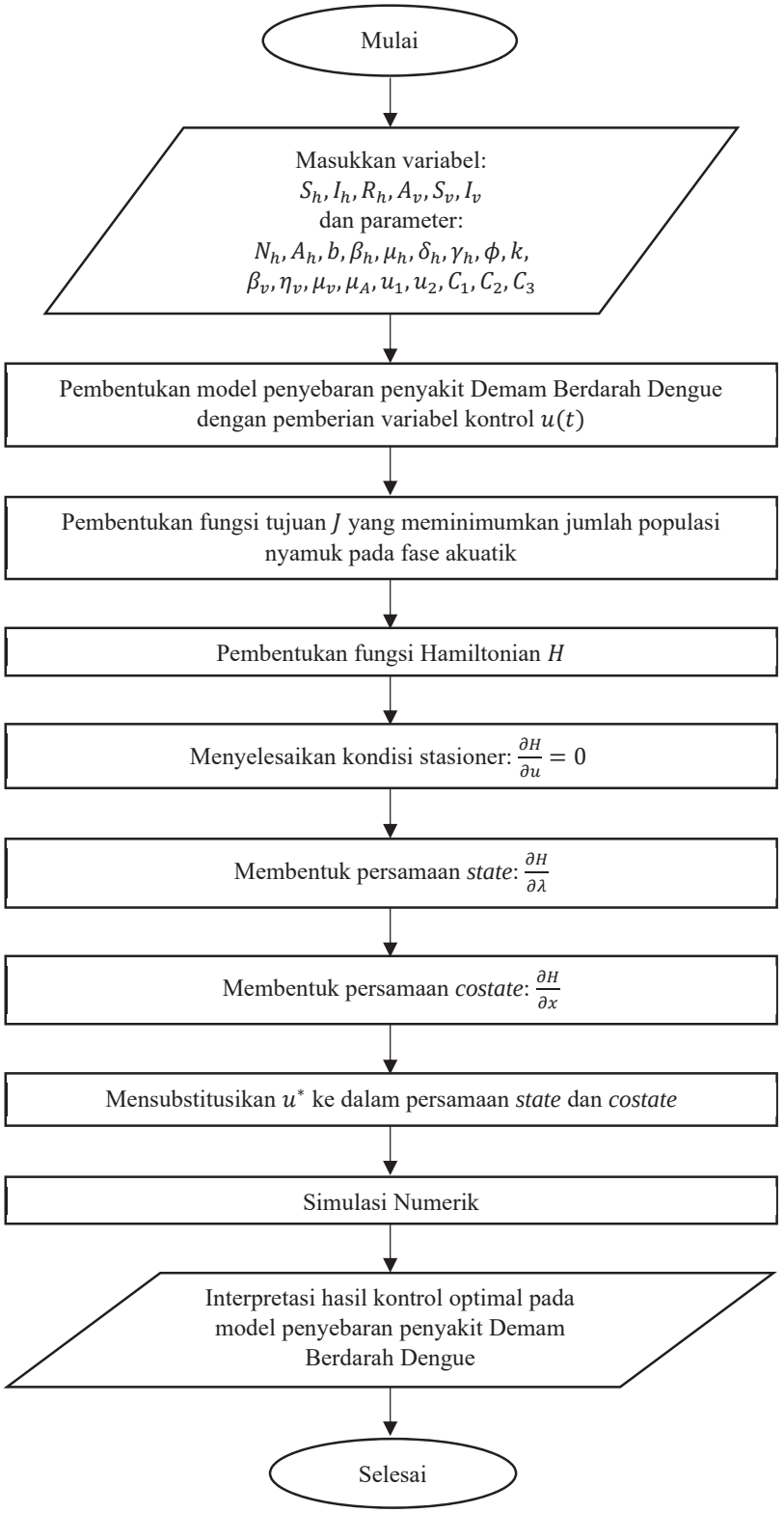
kontrol optimal dapat secara signifikan menurunkan jumlah individu yang terinfeksi DBD. Dalam periode pengamatan 12 bulan, pemberian kontrol berupa penyemprotan insektisida dan pengobatan berhasil menurunkan jumlah individu terinfeksi sebesar 99%. Penelitian ini juga menekankan bahwa pemberian kontrol optimal tidak hanya efektif dalam mengurangi jumlah kasus DBD, tetapi juga dapat meminimalkan biaya yang dibutuhkan untuk implementasi strategi pengendalian.

1.6 Metodologi Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan studi literatur. Studi literatur dilakukan dengan mencari dan memahami teori-teori pendukung yang berhubungan degan model matematika penyebaran penyakit DBD, penyakit DBD dan prinsip minimum Pontryagin. Literatur-literatur tersebut diperoleh dari buku, jurnal dan internet.

Langkah penyelesaian kontrol optimal pada penyebaran penyakit DBD ini dimulai dengan menentukan variabel kontrol yang akan disubstitusikan kedalam model matematika penyebaran penyakit DBD. Pengendalian dilakukan dengan menambahkan variabel kontrol berupa pemberian larvasida (u_1) dan gerakan 3M (u_2). Selanjutnya, pembentukan fungsi tujuan J dan membentuk fungsi Hamiltonian H. Fungsi Hamiltonian yang telah dibentuk selanjutnya menentukan kondisi stasioner, persamaan *state* dan persamaan *costate*. Penyelesaian kondisi stasioner dari fungsi Hamiltonian diperoleh bentuk kontrol u_1^* dan u_2^* yang optimal. Selanjutnya, nilai u_1^* dan u_2^* tersebut disubstitusikan kedalam persamaan *state* dan persamaan *costate* sehingga diperoleh sistem kontrol yang optimal dari model. Selanjutnya, melakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4. Langkah terakhir yaitu interpretasi berdasarkan grafik hasil simulasi numerik.

Langkah-langkah penyelesaian kontrol optimal pada penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin yang disajikan pada Gambar 1.1.



Gambar 1. 1 Flowchart kontrol optimal pada penyebaran penyakit DBD