KOMPLEKSITAS GRAF *COCKTAIL PARTY* DAN GRAF SANDAT BERDASARKAN SPEKTRUM LAPLACIAN

SURYANI
H1011211030

SKRIPSI

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

KOMPLEKSITAS GRAF *COCKTAIL PARTY* DAN GRAF SANDAT BERDASARKAN SPEKTRUM LAPLACIAN

SURYANI
H1011211030

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

LEMBAR PENGESAHAN

Judul Tugas Akhir	:	Kompleksitas Graf *Cocktail Party* dan Graf Sandat Berdasarkan Spektrum Laplacian
Nama Mahasiswa	:	Suryani
NIM	:	H1011211030
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/Matematika
Tanggal Lulus	:	2 Juni 2025
SK Pembimbing	:	No. 2557/UN22.8/TD.06/2024/Tanggal 2 September 2024
SK Penguji	:	No. 1530/UN22.8/TD.06/2025/Tanggal 23 Mei 2025

Dosen Pembimbing

Pembimbing I	Pembimbing II
Fransiskus Fran, S.Si., M.Si.	Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc.
NIP 198804152019031014	NIP 197911152005011003

Dosen Penguji

Ketua Penguji	Anggota Penguji
Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc.	Yudhi, S.Si., M.Si.
NIP 198105102005012003	NIP 198504072019031004

Pimpinan Sidang (merangkap anggota penguji)	Sekretaris Sidang (merangkap anggota penguji)
Fransiskus Fran, S.Si., M.Si.	Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc.
NIP 198804152019031014	NIP 197911152005011003

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Prof. Dr. Gusrizal, S.Si., M.Si.
NIP 197108022000031001

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: SURYANI
NIM	: H1011211030
Program Studi/Jurusan	: Matematika/Matematika
Fakultas	: MIPA

dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak megandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas Akhir ini mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai ketentuan perundangan tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyataan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, 23 Mei 2025



SURYANI
NIM H1011211030

Kompleksitas Graf *Cocktail Party* dan Graf Sandat Berdasarkan Spektrum Laplacian

Abstrak

Misalkan G adalah graf terhubung dan tidak berarah. Setiap graf terhubung G memiliki pohon perentang, yaitu subgraf G yang terdiri dari seluruh simpul dalam graf G dan membentuk pohon. Kompleksitas graf G, yang dinotasikan dengan $\tau(G)$, merupakan banyaknya pohon perentang pada graf G. Dalam penelitian ini, digunakan pendekatan spektrum Laplacian untuk menentukan kompleksitas graf, khususnya graf *Cocktail Party* dan graf Sandat. Spektrum Laplacian merupakan matriks yang dibentuk dari susunan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Laplacian dan multiplisitasnya. Penelitian diawali dengan menentukan matriks *adjacency* dan matriks *degree* dari graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k = 2,3$ dan graf Sandat St_k untuk $k = 1,2,3$, kemudian dibentuk matriks Laplacian serta polinomial karakteristik matriks Laplaciannya. Selanjutnya, dirumuskan formula polinomial karakteristik ke-k matriks Laplacian masing-masing graf. Pembuktian kebenaran formula polinomial karakteristik dilakukan dengan memanfaatkan matriks blok. Berdasarkan hasil tersebut, dirumuskan dan dibuktikan formula spektrum Laplacian, serta formula kompleksitas graf untuk graf *Cocktail Party* dan Sandat. Hasil dari penelitian ini adalah rumusan spektrum Laplacian dan kompleksitas dari graf *Cocktail Party* serta graf Sandat.

Kata kunci: pohon perentang, nilai eigen, matriks Laplacian

Complexity of Cocktail Party Graphs and Sandat Graphs Based On Laplacian Spectrum Method

Abstract

Let G be a connected and undirected graph. Every connected graph G contains a spanning tree, which is a subgraph of G that consists of all vertices in graph G and forms a tree. The complexity of graph G, denoted by $\tau(G)$, corresponds to the number of spanning trees in graph G. In this research, the Laplacian spectrum approach is employed to ascertain the complexity of graphs, with particular focus on the Cocktail Party and Sandat graphs. The Laplacian spectrum is a matrix formed by the arrangement of the eigenvalues obtained from the Laplacian matrix and its multiplicities. The study begins by determining the adjacency matrix and the degree matrix of the Cocktail Party graph CP_k for $k = 2,3$ and the Sandat graph St_k for $k = 1,2,3$, followed by the construction of the Laplacian matrix and its characteristic polynomial. Subsequently, the k-th characteristic polynomial formula of the Laplacian matrix for each graph is formulated. The validity of the charascteristic polynomial formula is proven using block matrices. Based on these results, the Laplacian spectrum formula and the graph complexity formula for the Cocktail Party and Sandat graphs are formulated and proven. The principal outcomes of this study are the formulation of the Laplacian spectrum and complexity of the Cocktail Party graph and Sandat graph.

Keywords: *spanning tree, eigenvalues, Laplacian matrix*

PRAKATA

Puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas berkat-Nya penulis dapat menyusun skripsi dengan judul "Kompleksitas Graf *Cocktail Party* dan Graf Sandat Berdasarkan Spektrum Laplacian" sebagai syarat untuk menyandang gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Tanjungpura Pontianak. Penulis memahami bahwa terdapat beberapa pihak yang telah membantu selama proses penyusunan skripsi ini. Berdasarkan hal tersebut, penulis berterima kasih kepada:

1. Kedua orangtua penulis beserta saudara yang senantiasa memberikan dukungan emosional, moral, spiritual, dan finansial sehingga penulis dapat melaksanakan perkuliahan dengan baik dan benar.
2. Bapak Fransiskus Fran, M.Si selaku dosen pembimbing pertama dan Bapak Dr. Bayu Prihandono, M.Sc. selaku dosen pembimbing kedua yang senantiasa membimbing dan memberikan arahan dalam penulisan, pengetahuan, dan saran serta motivasi kepada penulis.
3. Ibu Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc. selaku dosen penguji pertama dan Bapak Yudhi, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji kedua yang telah banyak memberikan masukan dan saran kepada penulis.
4. Bapak Drs. Helmi, M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang telah membimbing selama penulis menjalankan masa studi.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu selama masa perkuliahan.
6. Teman-teman penulis yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini memberikan dampak positif dan manfaat bagi kita semua. Demikian pengantar yang dapat penulis sampaikan, atas perhatian pembaca, penulis mengucapkan terima kasih.

Pontianak, 23 Mei 2025

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN ..... **ii**

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK ..... **iii**

Abstrak ..... **iv**

Abstract ..... **v**

PRAKATA ..... **vi**

DAFTAR ISI ..... **vii**

DAFTAR GAMBAR ..... **ix**

DAFTAR TABEL ..... **x**

DAFTAR SIMBOL ..... **xi**

BAB I PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 3

1.3 Tujuan Penelitian 3

1.4 Batasan Masalah 3

1.5 Tinjauan Pustaka 3

1.6 Metodologi Penelitian 4

BAB II LANDASAN TEORI **6**

2.1 Teori Graf 6

2.2 Jenis-jenis Graf 7

2.3 Matriks Representasi Graf 9

2.4 Matriks Blok 15

2.5 Spektrum Graf 18

2.6 Kompleksitas Graf 21

BAB III SPEKTRUM LAPLACIAN DAN KOMPLEKSITAS GRAF 27

3.1 Spektrum Laplacian dan Kompleksitas Graf *Cocktail Party* ($CP_k, k \in \mathbb{N}, k > 1$) 27

3.2 Spektrum Laplacian dan Kompleksitas Graf Sandat ($St_k, k \in \mathbb{N}$) 32

BAB IV SIMPULAN 40

DAFTAR PUSTAKA 41

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Diagram alir untuk menentukan kompleksitas graf CP_k dan St_k 5
Gambar 2.1 Graf G 6
Gambar 2.2 Graf CP_k 7
Gambar 2.3 Graf St_k 9
Gambar 2.4 Graf C_5 10
Gambar 3.1 Graf CP_2 27
Gambar 3.2 Graf CP_3 28
Gambar 3.3 Pohon perentang graf CP_2 32
Gambar 3.4 Graf St_1 32
Gambar 3.5 Graf St_2 33
Gambar 3.6 Graf St_3 34
Gambar 3.7 Pohon perentang graf St_1 39

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Polinomial Karakteristik Matriks Laplacian Graf CP_k 29
Tabel 3.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplacian Graf St_k 35

DAFTAR SIMBOL

$G = (V(G), E(G))$	: Graf G dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$
uv	: Sisi yang menghubungkan antara simpul u dan simpul v
$\|V(G)\|$	: Kardinalitas simpul pada graf G
$\|E(G)\|$	: Kardinalitas sisi pada graf G
$A(G)$	: Matriks *adjacency*
$D(G)$	: Matriks *degree*
$L(G)$	: Matriks Laplacian
$Spec(G)$	: Spektrum *adjacency* dari graf G
$Spec_L(G)$	: Spektrum Laplacian dari graf G
$\tau(G)$	: Kompleksitas graf G
CP_k	: Graf *Cocktail Party* dengan $k \in \mathbb{N}, k > 1$
St_k	: Graf Sandat dengan $k \in \mathbb{N}$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang kajian matematika diskret yang mempelajari mengenai simpul dan sisi. Graf sering digunakan untuk memodelkan berbagai jaringan yang ada di dunia nyata, seperti jaringan sosial, jaringan listrik, dan jaringan transportasi (Aksoy dkk., 2019; Peranginangin, 2024; Ubaidillah & Abrori, 2014). Dalam perkembangan teori graf, salah satu aspek yang menarik untuk diteliti ialah teori spektral graf, yaitu kajian yang mempelajari tentang sifat-sifat graf yang berkaitan dengan polinomial karakteristik, nilai eigen, dan multiplisitasnya yang menjadi dasar dalam penyusunan spektrum suatu graf (Agustina dkk., 2022). Penelitian ini secara khusus membahas spektrum Laplacian, yaitu spektrum yang diperoleh dari matriks Laplacian.

Kompleksitas graf G, yang dinotasikan dengan $\tau(G)$, adalah banyaknya pohon perentang dalam suatu graf G (Deen dkk., 2023). Dalam teori graf, pohon adalah graf tak berarah tanpa *loop* yang terhubung dan tak membentuk siklus. Selanjutnya, pohon perentang adalah subgraf dari suatu graf yang merupakan pohon dan memuat semua simpul dalam graf tersebut (Fikadila dkk., 2024). Salah satu bentuk penerapan kompleksitas graf seperti menghitung isomer kimia tertentu, yaitu senyawa yang memiliki rumus molekul sama namun dengan struktur yang berbeda (Brown dkk., 1996). Kompleksitas graf merupakan salah satu topik yang terus menjadi perhatian dalam teori graf, karena berkaitan langsung dengan banyaknya pohon perentang pada graf terhubung.

Spektrum Laplacian adalah matriks berukuran $2 \times n$, yang elemen-elemen baris pertamanya merupakan nilai eigen dari matriks Laplacian $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ yang diurutkan sehingga, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n = 0$, dan baris keduanya merupakan multiplisitas masing-masing nilai eigen pada baris pertama $(m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n))$. Spektrum Laplacian dari suatu graf dapat digunakan untuk menentukan kompleksitas graf, sehingga penting dalam berbagai aplikasi, termasuk dalam fisika jaringan, optimisasi, dan teori aliran (Biggs, 1993; Forrow

dkk., 2018; Kempton dkk., 2017). Secara teori, beberapa peneliti juga telah mengkaji spektrum Laplacian pada beberapa jenis graf seperti Umam (2019) mengkaji spektrum Laplacian pada graf Mahkota, Triyani dkk., (2024) mengkaji spektrum Laplacian pada graf Mahkota dan graf Benteng, serta Amaliyanah dkk., (2022) telah mengkaji spektrum Laplacian pada graf Kincir angin berarah.

Sejak Kirchhoff memperkenalkan Teorema Pohon Matriks untuk menghitung kompleksitas graf, berbagai pendekatan baru telah dikembangkan untuk menentukan banyaknya pohon perentang pada graf, salah satunya yaitu menggunakan spektrum Laplacian (Biggs, 1993). Perbedaan utama penelitian ini dibandingkan dengan riset terdahulu terletak pada metode perhitungan kompleksitas graf dan jenis graf yang menjadi objek kajian. Sebagian besar penelitian terdahulu menghitung kompleksitas graf menggunakan Teorema Pohon Matriks yang berfokus pada determinan matriks Laplacian. Selain itu, terdapat beberapa penelitian terdahulu yang telah membahas mengenai banyaknya pohon perentang pada berbagai jenis graf (Fran dkk., 2024, 2025; Hanssen dkk., 2024; Khattabi dkk., 2019; Rahmawati, 2016), namun penelitian mengenai spektrum Laplacian dan kompleksitas graf *Cocktail Party* dan graf Sandat masih sangat terbatas. Penelitian ini secara khusus menggunakan spektrum Laplacian untuk menentukan kompleksitas graf *Cocktail Party* dan graf Sandat, sehingga penelitian ini memberikan kontribusi baru dalam metode perhitungan kompleksitas graf pada jenis graf yang belum banyak dikaji sebelumnya.

Secara garis besar, penelitian ini diawali dengan menentukan matriks *adjacency* dan matriks *degree* dari graf *Cocktail Party* dan graf Sandat pada beberapa nilai k, kemudian dibentuk matriks Laplacian dan ditentukan polinomial karakteristiknya. Setelah ditemukan pola berulang pada polinomial karakteristik masing-masing graf, dirumuskan pola ke-k. Selanjutnya dilakukan pembuktian kebenaran mengenai polinomial karakteristik yang telah dirumuskan untuk kemudian dilanjutkan dengan merumuskan spektrum Laplacian dan kompleksitas graf. Karena matriks Laplacian ke-k masing-masing graf berukuran besar, maka ada berbagai pendekatan yang dapat dimanfaatkan untuk menghitung determinan dari matriks ini, seperti pemanfaatan polinomial Chebyshev (Nurliantika dkk., 2025)

atau seperti yang digunakan dalam penelitian ini yaitu dengan memanfaatkan matriks blok. Melalui bantuan matriks blok untuk menghitung nilai eigen pada spektrum Laplacian dari graf *Cocktail Party* dan graf Sandat, diperoleh formula kompleksitas kedua graf tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, masalah yang dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana merumuskan formula kompleksitas graf *Cocktail Party* dan Sandat.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, penelitian ini bertujuan untuk:

1. Merumuskan spektrum Laplacian graf *Cocktail Party* dan Sandat.
2. Merumuskan kompleksitas graf *Cocktail Party* dan Sandat.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penyusunan skripsi ini ialah hanya membahas graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah, yaitu graf *Cocktail Party* dan graf Sandat.

1.5 Tinjauan Pustaka

Buku *Algebraic Graph Theory* karya Norman Biggs merupakan salah satu referensi utama dalam pengembangan metode perhitungan kompleksitas graf menggunakan pendekatan matriks dan spektrum. Biggs membahas bahwa matriks Laplacian, yang diperoleh dari selisih antara matriks *degree* dan matriks *adjacency,* dapat digunakan untuk menentukan banyaknya pohon perentang pada graf. Kontribusi penting dari Biggs adalah penjelasan mengenai metode menghitung kompleksitas graf dengan menggunakan spektrum Laplacian (Biggs, 1993).

Merris (1994) memberikan tinjauan luas mengenai berbagai sifat dan aplikasi matriks Laplacian pada graf. Penelitian ini mencakup spektrum Laplacian, dan hubungan dengan pohon perentang. Merris menunjukkan bahwa matriks Laplacian, yang diperoleh dari selisih antara matriks *degree* dan matriks *adjacency* suatu graf, memiliki berbagai aplikasi, termasuk dalam teori jaringan dan kimia (Merris, 1994).

Hammer dan Kelmans (1996) meneliti hubungan antara spektrum Laplacian, polinomial Laplacian, dan banyaknya pohon perentang pada graf *threshold*. Mereka

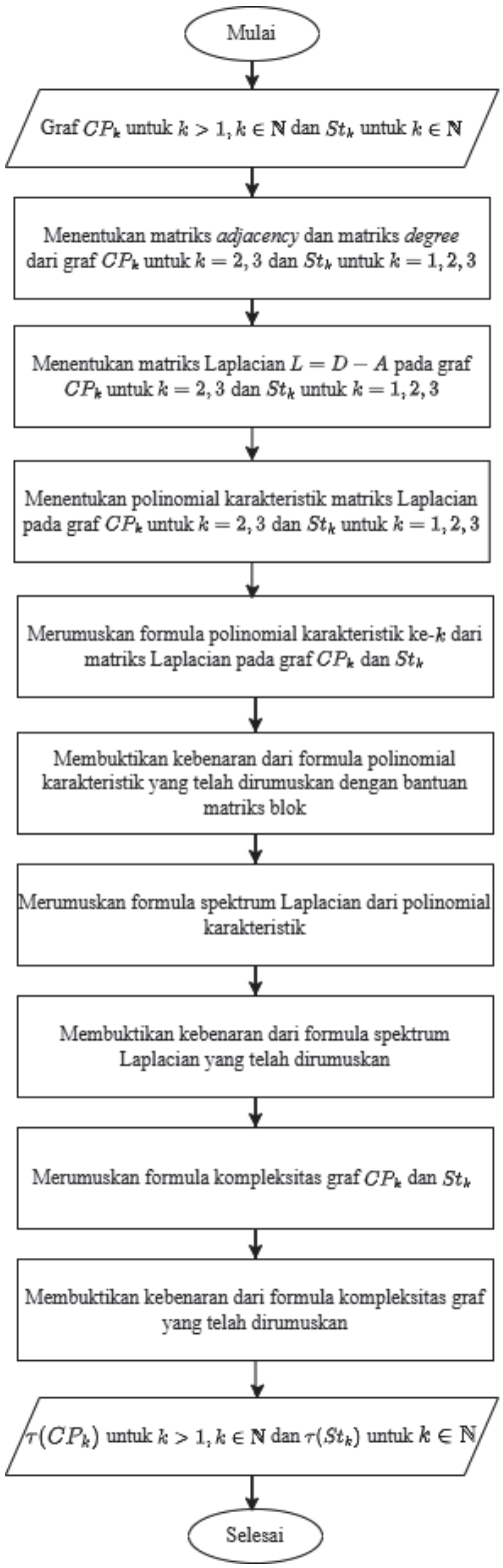
memberikan formula eksplisit untuk menghitung spektrum Laplacian dan banyaknya pohon perentang berdasarkan urutan derajat simpul. Studi ini menjadi acuan penting dalam menganalisis graf-graf sederhana menggunakan pendekatan spektrum (Hammer & Kelmans, 1996).

1.6 Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka, yaitu dengan membaca literatur yang berhubungan dengan matriks Laplacian dan kompleksitas graf. Literatur tersebut bersumber dari buku, artikel pada jurnal dan penelusuran melalui internet. Secara umum, langkah-langkah dalam menentukan kompleksitas graf pada graf CP_k dan St_k sebagai berikut.

1. Menentukan matriks *adjacency* dan matriks *degree* dari graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k = 2,3$ dan graf Sandat St_kuntuk $k = 1,2,3$.
2. Menentukan matriks Laplacian $L = D - A$ pada graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k = 2,3$ dan graf Sandat St_k untuk $k = 1,2,3$ dengan D dan A masing-masing merupakan matriks *degree* dan matriks *adjacency*.
3. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks Laplacian L pada graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k = 2,3$ dan graf Sandat St_k untuk $k = 1,2,3$.
4. Merumuskan formula polinomial karakteristik ke-k dari matriks Laplacian pada graf *Cocktail Party* CP_k dan graf Sandat St_k.
5. Membuktikan kebenaran dari formula polinomial karakteristik yang telah dirumuskan dengan bantuan matriks blok.
6. Merumuskan formula spektrum Laplacian dari polinomial karakteristik.
7. Membuktikan kebenaran dari formula spektrum Laplacian yang telah dirumuskan.
8. Merumuskan formula kompleksitas graf *Cocktail Party* CP_k dan graf Sandat St_k.
9. Membuktikan kebenaran dari formula kompleksitas graf yang telah dirumuskan.

Secara detail, tanpa mengurangi keumuman, diagram alir untuk menentukan kompleksitas graf CP_k dan St_k disajikan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Diagram alir untuk menentukan kompleksitas graf CP_k dan St_k