PENYELESAIAN NUMERIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL NON-LINEAR PADA MODEL LOTKA-VOLTERRA DENGAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

ROSIANA ANGGRAENI
H1011201010

SKRIPSI

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

PENYELESAIAN NUMERIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL NON-LINEAR PADA MODEL LOTKA-VOLTERRA DENGAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

ROSIANA ANGGRAENI
H1011201010

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

LEMBAR PENGESAHAN

Judul Tugas Akhir	:	Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear Pada Model Lotka-Volterra Dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton
Nama Mahasiswa	:	Rosiana Anggraeni
NIM	:	H1011201010
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/Matematika
Tanggal Lulus	:	14 Mei 2025
SK Pembimbing	:	No. 2647/UN22.8/TD.06/2024/Tanggal 2 September 2024
SK Penguji	:	No. 1268/UN22.8/TD.06/2025/Tanggal 28 April 2025

Dosen Pembimbing

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Bayu Prihandono, M.Sc.	Yudhi, M.Si.
NIP 197911152005011003	NIP 198504072019031004

Dosen Penguji

Ketua Penguji	Anggota Penguji
Dr. Evi Noviani, M. Si., CFrA	Nur'ainul Miftahul Huda, M.Si.
NIP 198402292006042001	NIP 199411142020122014
Pimpinan Sidang (merangkap anggota penguji)	Sekretaris Sidang (merangkap anggota penguji)
Dr. Bayu Prihandono, M.Sc.	Yudhi, M.Si.
NIP 197911152005011003	NIP 198504072019031004

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Prof. Dr. Gusrizal, M.Si.
NIP 197108022000031001

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Rosiana Anggraeni
NIM	:	H1011201010
Program Studi/Jurusan	:	Matematika/Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak mengandung unsur pelanggaran integritas Akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas akhir ini mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai ketentuan perundangan tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyataan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, April 2025



Rosiana Anggraeni

NIM H1011201010

Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear Pada Model Lotka-Volterra Dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton

Abstrak

Model Lotka-Volterra merupakan suatu sistem persamaan diferensial non-linear yang digunakan untuk memodelkan interaksi antara dua populasi. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan model Lotka-Volterra dengan menerapkan pendekatan numerik melalui metode Adams-Bashforth-Moulton. Proses penyelesaian menggunakan metode ini terlebih dahulu mencari empat solusi awal yang dihitung melalui metode Runge-Kutta orde empat. Nilai-nilai dari solusi awal tersebut yang kemudian digunakan ke dalam persamaan prediktor dari metode Adams-Bashforth untuk memperoleh nilai prediksi. Selanjutnya, nilai prediksi tersebut dikoreksi menggunakan persamaan korektor dari metode Adams-Moulton. Hasil dari penyelesaian numerik pada model Lotka-Volterra menunjukkan bahwa dinamika pertumbuhan populasi antara mangsa dan pemangsa akan terus berulang, membentuk suatu pola osilasi antara kedua spesies tersebut. Berdasarkan contoh kasus pada suatu ekosistem dimana terdapat dua spesies yaitu kelinci sebagai mangsa dan rubah sebagai pemangsa, pada saat hari ke-100 diperoleh jumlah populasi kelinci 42 ekor dan jumlah populasi rubah 46 ekor yang menunjukkan bahwa jumlah populasi rubah menjadi lebih banyak dibandingkan jumlah populasi kelinci. Interaksi antara mangsa dan pemangsa yang terjadi sangat mempengaruhi jumlah populasi kedua spesies dan dapat berpotensi merusak populasi mangsa.

Kata kunci: prediktor, korektor, populasi, mangsa, pemangsa.

Numerical Solving of Non-Linear Differential Equation Systems on the Lotka-Volterra Model with the Adams-Bashforth-Moulton Method

Abstract

The Lotka-Volterra model is a system of nonlinear differential equations used to model the interaction between two populations. This study aims to solve the Lotka-Volterra model by applying a numerical approach through the Adams-Bashforth-Moulton method. The solution process using this method first finds four initial solutions calculated using the fourth-order Runge-Kutta method. The values of these initial solutions are then used in the predictor equation of the Adams-Bashforth method to obtain the predicted values. Next, these predicted values are corrected using the corrector equation of the Adams-Moulton method. The results of the numerical solution of the Lotka-Volterra model show that the population growth dynamics between prey and predator will continue to repeat, forming an oscillation pattern between the two species. Based on a case study of an ecosystem with two species, namely rabbits as prey and foxes as predators, on day 100, the rabbit population was 42 and the fox population was 46, indicating that the fox population was larger than the rabbit population. The interaction between prey and predator significantly influences the population size of both species and has the potential to damage the prey population.

Keywords: *predictor, corrector, population, prey, predator.*

PRAKATA

Segala puji dan syukur atas kehadirat Allah SWT., yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear Pada Model Lotka-Volterra dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton**". Skripsi ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura. Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Kedua orang tua serta seluruh keluarga besar penulis yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi untuk menyelesaikan penulisan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Bayu Prihandono, M.Sc., Bapak Yudhi, M.Si., dan Ibu Mariatul Kiftiah, M.Sc., selaku dosen pembimbing yang telah membimbing dan memberikan arahan serta motivasi selama penulisan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Evi Noviani, M.Si., CFrA dan Ibu Nur'ainul Miftahul Huda, M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan arahan dan masukan dalam penulisan skripsi ini.
4. Ibu Evi Noviani, M.Si., CFrA dan Ibu Mariatul Kiftiah, M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan serta saran dan motivasi kepada penulis selama masa perkuliahan hingga proses penulisan skripsi ini.
5. Elza, Tasya, dan Evi yang senantiasa membantu dan mendukung penulis selama masa perkuliahan hingga proses penulisan skripsi ini.

Pontianak, April 2025

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN ..... **ii**
PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK ..... **iii**
Abstrak ..... **iv**
Abstract ..... **v**
PRAKATA ..... **vi**
DAFTAR ISI ..... **vii**
DAFTAR TABEL ..... **ix**
DAFTAR GAMBAR ..... **x**
DAFTAR SIMBOL ..... **xi**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Batasan Masalah 3
1.5 Tinjauan Pustaka 3
1.6 Metodologi 4
BAB II LANDASAN TEORI **9**
2.1 Persamaan Diferensial 9
2.2 Sistem Persamaan Diferensial 11
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Lotka-Volterra 12
2.4 Metode Numerik 14
2.5 Galat (*error*) 15
2.6 Polinom Interpolasi Selisih Terbagi Newton 17
2.7 Rumus Selisih Mundur Newton 19
2.8 Metode Runge-Kutta Orde Empat 19
BAB III ANALISIS NUMERIK MODEL LOTKA-VOLTERRA DENGAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON **25**
3.1 Adams-Bashforth-Moulton 25
3.2 Algoritma Metode Adams-Bashforth-Moulton 31
3.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear Model Lotka-Volterra dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton 39

3.4 Aplikasi Model Lotka-Volterra Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton..... 40
3.5 Analisis Numerik Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear Pada Model *Lotka-Volterra* dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton..... 48
BAB IV KESIMPULAN 52
DAFTAR PUSTAKA..... 54
LAMPIRAN..... 56

DAFTAR TABEL

Tabel 3. 1 Empat Solusi Awal Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat dengan $h = 0{,}1$ 34
Tabel 3. 2 Empat Solusi Awal Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat dengan $h = 0{,}05$ 36
Tabel 3. 3 Solusi Metode Adams-Bashforth-Moulton 38
Tabel 3. 4 Empat solusi awal model Lotka-Volterra menggunakan metode Runge-Kutta orde empat 43
Tabel 3. 7 Solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton pada populasi kelinci dan rubah 47
Tabel 3. 8 Data Hasil Perhitungan Pertumbuhan Populasi Kelinci dan Rubah Selama 100 hari 50

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1 Flowchart Metode Runge-Kutta orde 4 6
Gambar 1. 2 Flowchart Penyelesaian Numerik Model Lotka-Volterra dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton 8
Gambar 3. 1 Grafik Pertumbuhan Kelinci dan Rubah selama 100 hari 48
Gambar 3. 2 Grafik Potrait Fase Populasi Kelinci dan Rubah 49

DAFTAR SIMBOL

x : Populasi mangsa (individu)

y : Populasi pemangsa (individu)

t : Waktu, dinyatakan dalam hari

$\frac{dx}{dt}$: Laju pertumbuhan populasi mangsa pada saat waktu t, dinyatakan dalam individu per hari ($\frac{individu}{t}$)

$\frac{dy}{dt}$: Laju pertumbuhan populasi pemangsa pada saat waktu t dinyatakan dalam individu per hari ($\frac{individu}{t}$)

a : Tingkat pertumbuhan alami mangsa, dinyatakan dalam per hari $\left(\frac{1}{t}\right)$

b : Tingkat kematian mangsa karena predasi, dinyatakan dalam per hari per individu $\left(\frac{1}{t}.\frac{1}{individu}\right)$

c : Tingkat kematian pemangsa, dinyatakan dalam per hari $\left(\frac{1}{t}\right)$

e : Tingkat pertumbuhan pemangsa karena memakan mangsa, dinyatakan dalam per hari per individu $\left(\frac{1}{t}.\frac{1}{individu}\right)$

n : nilai langkah, dengan $n = 0,1,2, \dots, N$

y_n : nilai hampiran pada saat ke-n

h : ukuran langkah

ε : galat hampiran

t_n : waktu pada saat ke-n

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan dasar ilmu yang memiliki peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Banyak permasalahan yang muncul dalam berbagai bidang dapat diformulasikan ke dalam bentuk model matematika, salah satunya adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial banyak digunakan untuk menyederhanakan penyelesaian suatu masalah di berbagai bidang, seperti bidang biologi, ekonomi, teknik, matematika dan yang lainnya. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat suatu fungsi dan turunannya dengan y sebagai variabel terikat dan x sebagai variabel bebas (Boyce dkk, 2017).

Suatu persamaan diferensial berdasarkan variabel bebasnya dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan parsial. Persamaan diferensial yang lebih sering digunakan dalam bidang matematika adalah persamaan diferensial biasa. Orde suatu persamaan diferensial ditentukan oleh orde tertinggi dari turunan yang terdapat di dalamnya, sedangkan derajat dari persamaan diferensial ditentukan oleh pangkat tertinggi dari orde turunan yang tertinggi (Baisuni, 2006). Sistem persamaan diferensial merupakan gabungan dari beberapa persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan non-linear.

Dalam bidang ilmu ekologi, sistem persamaan diferensial dapat digunakan untuk memodelkan interaksi antara dua populasi. Model yang paling umum adalah model Lotka-Volterra yang dikembangkan oleh Alferd J. Lotka dan Vito Volterra dengan memodelkan interaksi antara dua populasi ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial non-linear, seperti hubungan mangsa dan pemangsa. Model Lotka-Volterra merupakan model dalam bentuk sistem persamaan diferensial non-linear yang menggambarkan interaksi antara dua makhluk hidup yang saling berikatan dalam bentuk predasi. Model Lotka-Volterra sulit untuk menentukan solusi eksaknya dengan metode analitik, dikarenakan model sistem persamaan

diferensial tersebut berupa non-linear (Darmawan, 2018). Meskipun metode analitik memberikan solusi eksak terbaik, akan tetapi metode analitik sulit untuk diterapkan pada sistem non-linear seperti model Lotka-Volterra. Sehingga, metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan model tersebut yang menghasilkan solusi hampiran yang mendekati nilai eksaknya (Chapra, 2018).

Metode numerik merupakan penyelesaian masalah secara matematis dengan cara operasi aritmetika. Solusi yang diperoleh dari metode numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan dari solusi analitiknya, sehingga solusi numerik tersebut memuat kesalahan (Apriadi dkk, 2014). Metode numerik terbagi menjadi dua yaitu metode satu langkah (*one-step*) dan metode banyak langkah (*multi-step*). Dalam penyelesaian masalah menggunakan metode satu langkah diperlukan satu nilai taksiran sebelumnya, sedangkan pada metode banyak langkah untuk memperoleh solusinya dibutuhkan nilai dari beberapa titik sebelumnya yang diperoleh dari metode satu langkah. Ada berbagai macam metode numerik yang dapat digunakan digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial non-linear, salah satunya metode Adams-Bashforth-Moulton.

Metode Adams-Bashforth-Moulton merupakan salah satu dari metode prediktor-korektor, dengan persamaan Adams-Bashforth sebagai persamaan prediktor yang digunakan untuk menghitung nilai prediksi dan persamaan Adams-Moulton sebagai persamaan korektor yang digunakan untuk mengoreksi nilai prediksi. Metode ini memerlukan beberapa nilai awal yang dapat diperoleh dari metode satu langkah, seperti metode Runge-Kutta. Untuk mendapatkan kombinasi hasil yang baik, metode Runge-Kutta dapat digunakan bersama metode Adams-Bashforth-Moulton (Conte dan Boor dalam Apriadi dkk, 2014). Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan digunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dalam penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial non-linear pada model Lotka-Volterra.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan maka rumusan masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana penyelesaian numerik sistem

persamaan diferensial non-linear model Lotka-Volterra menggunakan metode Adams Basforth-Moulton.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial non-linear model Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton.
2. Menganalisis penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial non-linear model Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton.

1.4 Batasan Masalah

Suatu penelitian memerlukan batasan-batasan agar dalam pelaksanaannya lebih jelas dan mengarah pada tujuan yang diharapkan. Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Model Lotka-Volterra hanya menggambarkan interaksi antara dua spesies, yaitu satu mangsa dan satu pemangsa. Dan faktor migrasi diabaikan, sehingga tidak ada spesies lain yang masuk atau keluar.
2. Model Lotka-Volterra tidak mempertimbangkan faktor lingkungan, sehingga kondisi lingkungan dianggap tetap konstan tanpa perubahan seiring waktu.

1.5 Tinjauan Pustaka

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial non-linear pada model Lotka-Volterra menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton dengan beberapa literatur yang dijadikan acuan. Pada penelitian ini terlebih dahulu dipelajari teori tentang persamaan diferensial dan sistem persamaan diferensial. Teori tersebut dibahas dalam buku yang ditulis oleh Baisuni (2006) dan Boyce dkk (2017). Pada buku yang ditulis oleh Murray (2002) membahas tentang persamaan umum dan asumsi pada model Lotka-Volterra.

Dalam penyelesaian persamaan model Lotka-Volterra dapat menggunakan metode numerik yang diperoleh dari buku Munir (2015).

Oktaviani dkk (2014) membahas tentang penyelesaian numerik model Lotka-Volterra menggunakan metode Heun. Penyelesaian numerik dengan metode Heun pada sistem persamaan diferensial non linear model Lotka-Volterra dengan faktor penghambat pertumbuhan sudah sesuai yang menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa mengalami empat kondisi yang akan berulang membentuk suatu osilasi mangsa-pemangsa. Selain itu, penelitian yang dilakukan Darmawan (2018) membahas tentang solusi numerik model Lotka-Volterra menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg yang mengkaji simulasi solusi numerik model Lotka-Volterra interaksi antara Ayam Hutan Hijau (Gallus varius) dengan Musang Luwak (Paradoxurus hermaproditus) yang hidup di Taman Nasional Alas Purwo. Dari hasil analisis metode Runge-Kutta-Fehlberg dapat menjadi salah satu alternatif solusi numerik yang bagus untuk penyelesaian persamaan diferensial terutama model Lotka-Volterra, dikarenakan rumitnya penyelesaian tersebut dengan metode analitik.

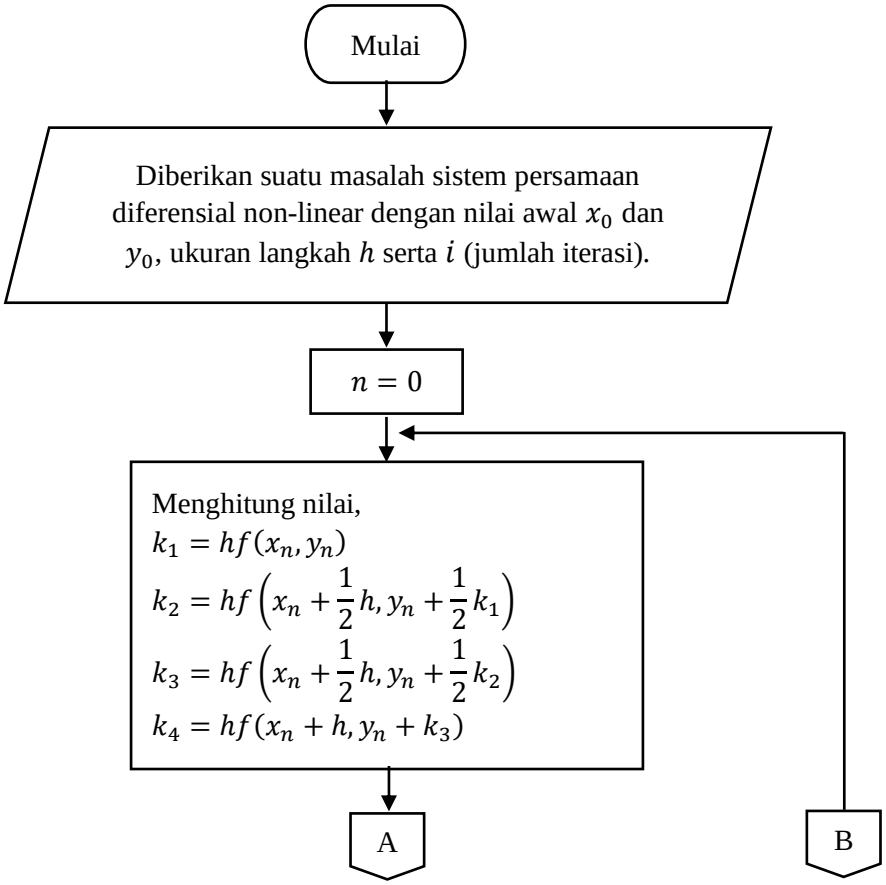
Kemudian, Apriadi dkk (2014) membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial non-linear menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton. Persamaan diferensial non-linear yang digunakan adalah persamaan bandul sederhana. Persamaan tersebut terlebih dahulu diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk mencari empat solusi awal yang akan disubstitusikan ke persamaan prediktor Adams-Bashforth. Selanjutnya nilai prediksi dikoreksi menggunakan persamaan korektor Adams-Moulton.

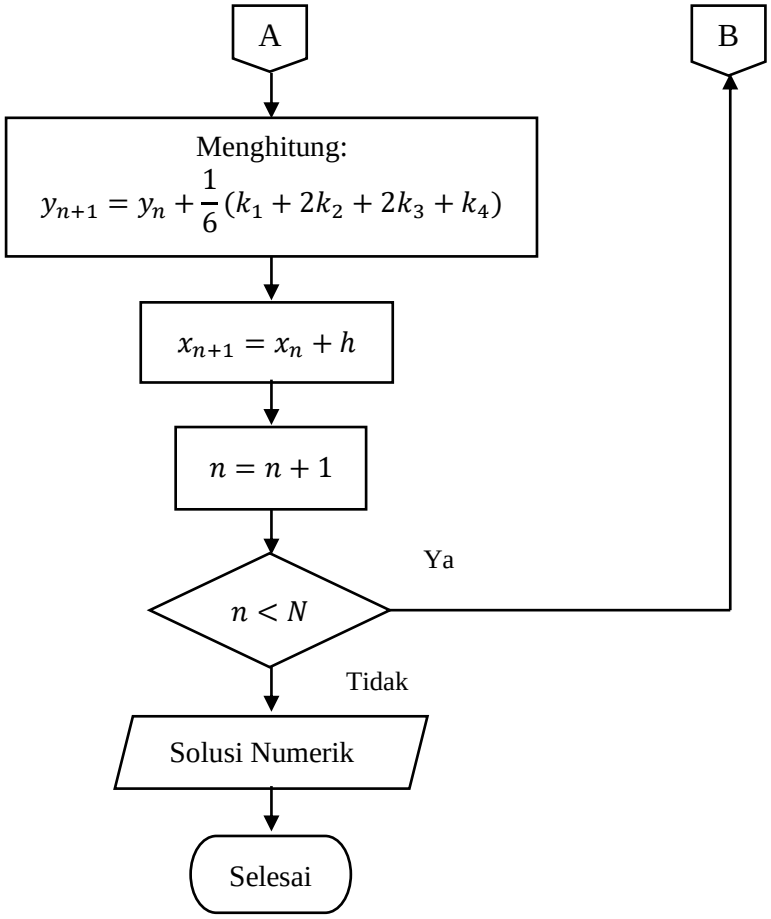
1.6 Metodologi

Pada penelitian ini diawali dengan melakukan studi literatur. Studi literatur dilakukan dengan mencari teori-teori pendukung yang bersumber dari skripsi, buku, jurnal, dan penelusuran melalui internet. Literatur yang digunakan berkaitan dengan sistem persamaan diferensial, metode numerik, model Lotka-Volterra, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Masalah yang akan dibahas dalam

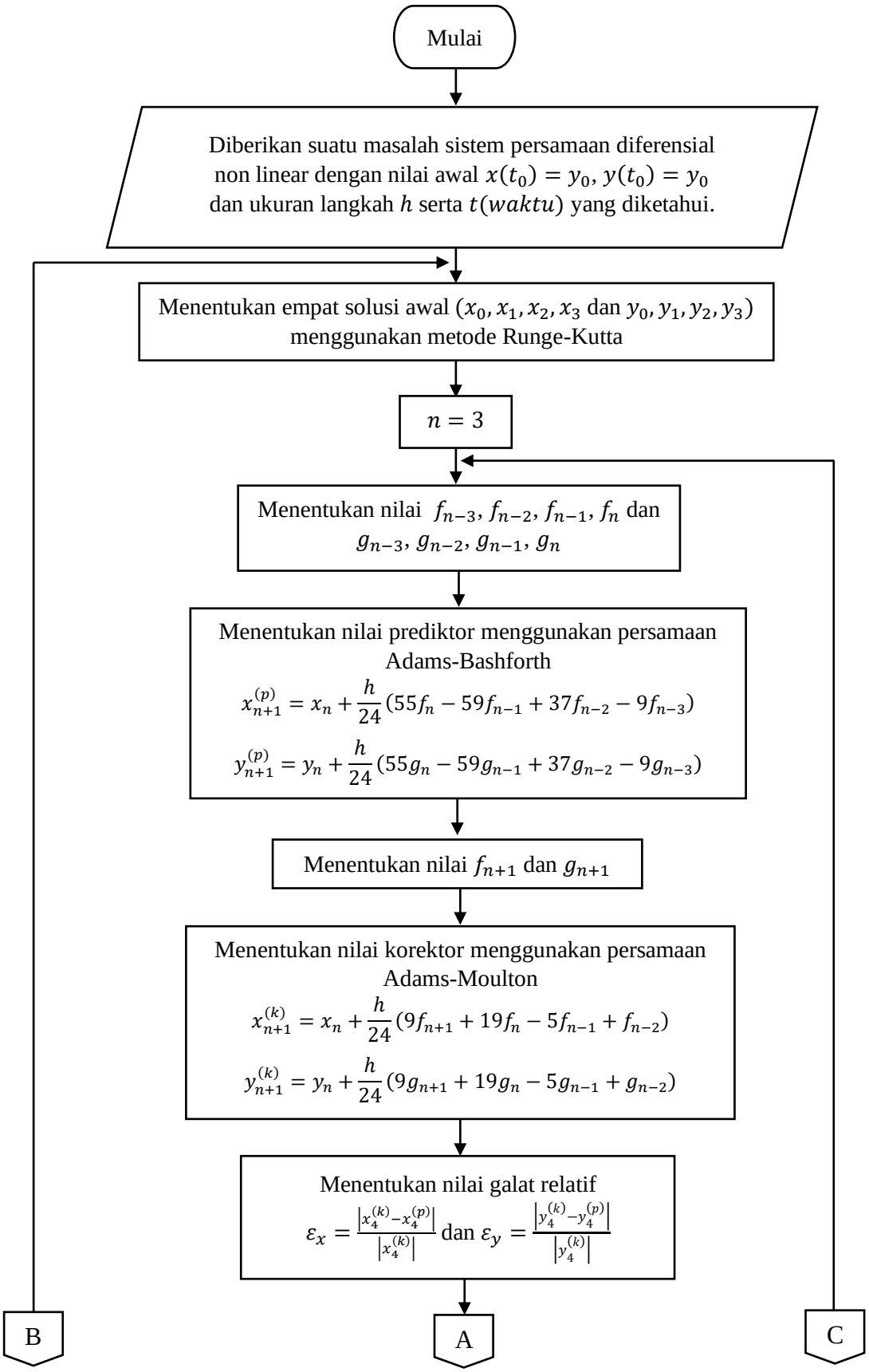
penelitian ini adalah bagaimana menyelesaikan sistem persamaan diferensial non-linear dengan metode Adams-Bashforth-Moulton.

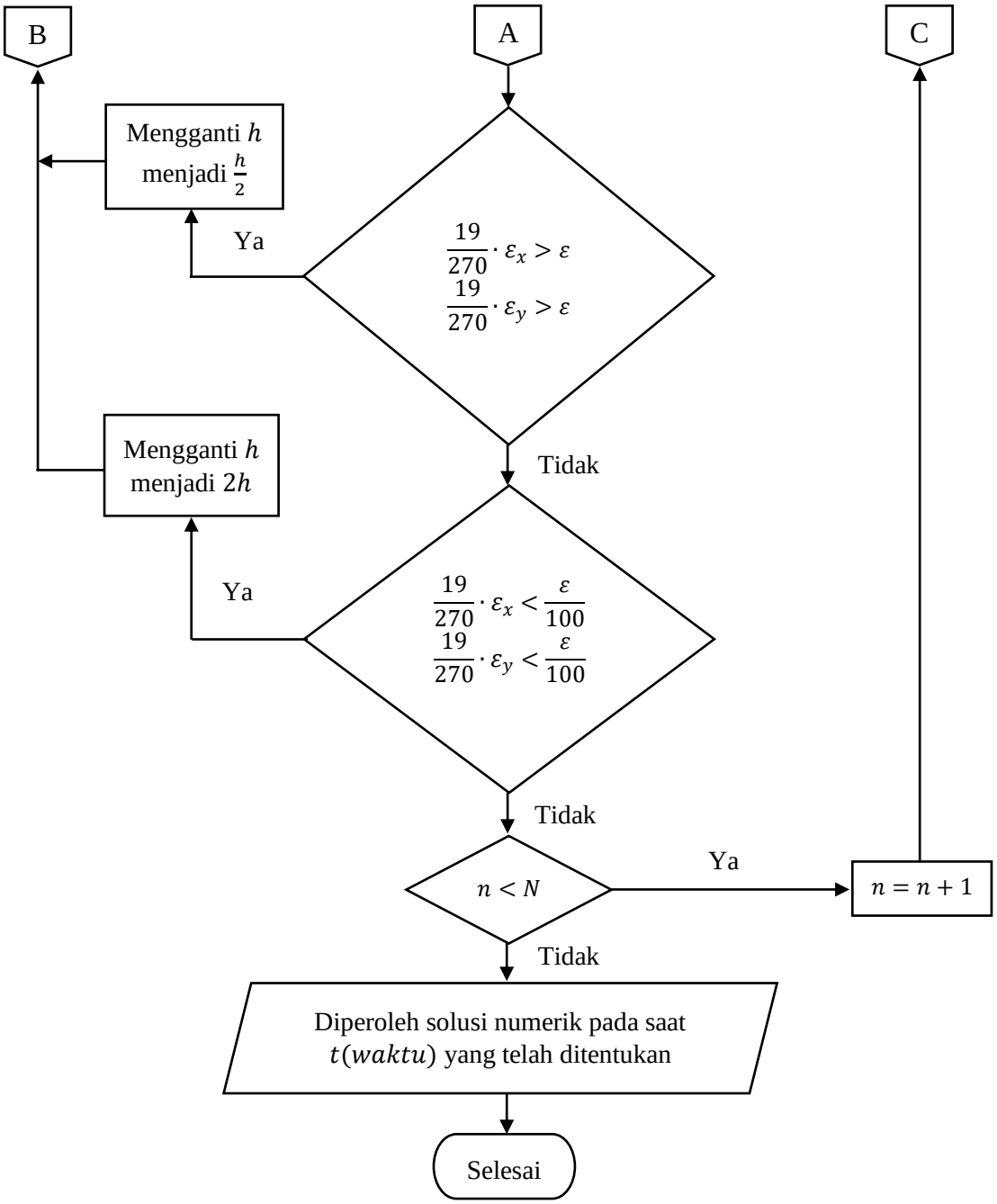
Diberikan suatu masalah sistem persamaan diferensial non-linear model Lotka-Volterra yang mempunyai nilai awal $x(t_0) = x_0$ dan $y(t_0) = y_0$ yang diketahui. Sebelum menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton, terlebih dahulu mencari empat nilai awal pada titik-titik tertentu dengan ukuran langkah h yang sama menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Untuk memperoleh solusi pada titik selanjutnya hal pertama yang dilakukan adalah mencari nilai fungsi pada masing-masing titik yang diperoleh dari metode Runge-Kutta. Setelah itu nilai-nilai tersebut disubstitusikan ke persamaan Adams-Bashforth. Kemudian dilanjutkan dengan menggunakan metode Adams-Moulton untuk memperoleh solusi yang paling akurat. Selanjutnya dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah h yang diperkecil atau diperbesar. Setelah mendapatkan ukuran langkah h yang baru, hitung kembali empat solusi awal menggunakan metode Runge-Kutta.





Gambar 1. 1 Flowchart Metode Runge-Kutta orde 4


Mulai
Diberikan suatu masalah sistem persamaan diferensial non linear dengan nilai awal $x(t_0) = y_0, y(t_0) = y_0$ dan ukuran langkah h serta $t(waktu)$ yang diketahui.
Menentukan empat solusi awal (x_0, x_1, x_2, x_3 dan y_0, y_1, y_2, y_3) menggunakan metode Runge-Kutta
$n = 3$
Menentukan nilai $f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n$ dan $g_{n-3}, g_{n-2}, g_{n-1}, g_n$
Menentukan nilai prediktor menggunakan persamaan Adams-Bashforth
$x_{n+1}^{(p)} = x_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$
$y_{n+1}^{(p)} = y_n + \frac{h}{24}(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3})$
Menentukan nilai f_{n+1} dan g_{n+1}
Menentukan nilai korektor menggunakan persamaan Adams-Moulton
$x_{n+1}^{(k)} = x_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$
$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}(9g_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2})$
Menentukan nilai galat relatif
$\varepsilon_x = \frac{\left|x_4^{(k)} - x_4^{(p)}\right|}{\left|x_4^{(k)}\right|}$ dan $\varepsilon_y = \frac{\left|y_4^{(k)} - y_4^{(p)}\right|}{\left|y_4^{(k)}\right|}$
B
A
C



Gambar 1. 2 Flowchart Penyelesaian Numerik Model Lotka-Volterra dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton