DETERMINAN MATRIKS *ADJACENCY* PADA *PAN GRAPH*

ADRIANTO
H1011201004

SKRIPSI

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

DETERMINAN MATRIKS *ADJACENCY* PADA *PAN GRAPH*

ADRIANTO
H1011201004

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

LEMBAR PENGESAHAN

Judul Tugas Akhir	: Determinan Matriks *Adjacency* Pada *Pan Graph*
Nama Mahasiswa	: Adrianto
NIM	: H1011201004
Jurusan/Program Studi	: Matematika/Matematika
Tanggal Lulus	: 5 Agustus 2025
SK Pembimbing	: No.673/UN22.8/TD.06/2024/Tanggal 1 Maret 2024
SK Penguji	: No.2474/UN22.8/TD.06/2025/Tanggal 25 Juli 2025

Dosen Pembimbing

Pembimbing I	Pembimbing II
Fransiskus Fran, M.Si.	Dr. Nilamsari Kusumastuti, M.Sc.
NIP 198804152019031014	NIP 198105102005012003

Dosen Penguji

Ketua Penguji	Anggota Penguji
Dr. Evi Noviani, M.Si.,CFrA.	Yudhi, M.Si.
NIP 198402292006042001	NIP 198504072019031004

Pimpinan Sidang (merangkap anggota penguji)	Sekretaris Sidang (merangkap anggota penguji)
Fransiskus Fran, M.Si.	Dr. Nilamsari Kusumastuti, M.Sc.
NIP 198804152019031014	NIP 198105102005012003

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Prof. Dr. Gusrizal, S.Si., M.Si.
NIP 197108022000031001

Dipindai dengan CamScanner

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Adrianto
NIM	: H1011201004
Program Studi/Jurusan	: Matematika/ Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas Akhir ini Mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai ketentuan perundangan tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyataan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya.



Pontianak, 5 Agustus 2025

Adrianto

H1011201004

Dipindai dengan CamScanner

Determinan Matriks *Adjacency* pada *Pan Graph*

Abstrak

Penelitian ini membahas determinan matriks *adjacency* pada *pan graph* $T_{n,1}$ adalah graf yang dibentuk dengan menggabungkan graf *cycle* C_n yaitu graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua dan graf *singleton* K_1 yaitu graf yang hanya memiliki satu simpul tunggal yang tidak memiliki koneksi dengan simpul lain, kemudian menambahkan satu sisi penghubung. Matriks *adjacency* merepresentasikan hubungan antar simpul dalam bentuk matriks. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum matriks *adjacency* $T_{n,1}$, menghitung determinan matriks *adjacency* $T_{n,1}$ untuk $n = 3,4,\dots,10$, serta merumuskan dan membuktikan nilai dan pola determinan matriks *adjacency* $T_{n,1}$. Langkah-langkah yang digunakan meliputi pembentukan matriks *adjacency* berdasarkan struktur graf, perhitungan determinan melalui matriks blok dan ekspansi kofaktor, serta pembuktian pola menggunakan induksi matematika. Hasil menunjukkan bahwa determinan memiliki pola tertentu yang bergantung pada simpul graf tersebut. Penelitian ini berhasil menentukan pola determinan matriks *adjacency* dari $T_{n,1}$ yaitu:

$$\det\left(A\left(T_{n,1}\right)\right) = \begin{cases} 1, & n = 4m-1, \quad m \in \mathbb{N} \\ 0, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N} - \{1\} \\ -1, & n = 4m+1, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Kata kunci: *Pan Graph,* Induksi Matematika, Matriks Blok

Determinants Of Adjacency Matrix in Pan Graph

Abstract

This study discusses the determinant of the adjacency matrix of the pan graph $T_{n,1}$ which is a graph formed by combining the cycle graph C_n a simple graph in which each vertex has degree two, and the singleton graph K_1 which is a graph that has only one isolated vertex with no connection to other vertices, followed by the addition of one connecting edge. The adjacency matrix represents the relationships between vertices in matrix form. This study aims to determine the general form of the adjacency matrix $T_{n,1}$, calculate the determinant of the adjacency matrix $T_{n,1}$ for $n = 3,4,\dots,10$, and to formulate and prove the values and pattern of the determinant of the adjacency matrix $T_{n,1}$. The steps used include constructing the adjacency matrix based on the graph's structure, calculating the determinant through block matrices and cofactor expansion, and proving the pattern using mathematical induction. The results show that the determinant follows a certain pattern depending on the number of vertices in the graph. This study successfully determines the pattern of the determinant of the adjacency matrix of $T_{n,1}$ namely:

$$\det\left(A\left(T_{n,1}\right)\right) = \begin{cases} 1, & n = 4m-1, \quad m \in \mathbb{N} \\ 0, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N} - \{1\} \\ -1, & n = 4m+1, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Keywords: *Pan Graph, Mathematical Induction, Block Matrix*

PRAKATA

Puji Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul Determinan Matriks *Adjacency* Pada *Pan Graph*. Skripsi ini dibuat untuk memenuhi tugas akhir perkuliahan dan sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura. Penulis menyadari bahwa selama penulisan skripsi ini tentunya tidak lepas dari bimbingan, masukan, dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-sebesarnya kepada :

1. Kedua orang tua, abang, keluarga serta pacar saya yang selalu mendoakan, memberikan dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Fransiskus Fran, M.Si selaku Dosen Pembimbing pertama dan Ibu Dr. Nilamsari Kusumastuti, M.Sc selaku Dosen Pembimbing kedua yang telah memberikan bimbingan, arahan dan motivasi yang sangat berarti selama penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Evi Noviani, M.Si.,CFrA selaku dosen penguji pertama dan Bapak Yudhi, M.Si selaku dosen penguji kedua yang telah memberikan masukan, kritik, dan saran yang membangun dalam proses penyusunan skripsi ini.
4. Seluruh dosen di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura yang sudah memberikan ilmu yang bermanfaat selama masa perkuliahan.
5. Keluarga Mahasiswa Matematika angkatan 2020 yang telah memberikan motivasi, masukan, serta menjadi sahabat bagi penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna bagi pembaca.

Pontianak, 5 Agustus 2025

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN ..... **ii**
PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK ..... **iii**
Abstrak ..... **iv**
Abstract ..... **v**
PRAKATA ..... **vi**
DAFTAR ISI ..... **vii**
DAFTAR GAMBAR ..... **viii**
DAFTAR SIMBOL ..... **ix**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Batasan Masalah 3
1.5 Tinjauan Pustaka 4
1.6 Metodelogi Penelitian 5
BAB II LANDASAN TEORI **7**
2.1 Konsep Dasar Graf 7
2.2 Terminologi Dasar Graf 8
2.3 Jenis-jenis Graf 11
2.4 Matriks 15
2.5 Determinan Matriks 16
2.6 Matriks Blok 19
2.7 Determinan Matriks Blok 20
2.8 Induksi Matematika 23
BAB III DETERMINAN MATRIKS *ADJACENCY* Pada *PAN GRAPH* **26**
BAB IV KESIMPULAN **47**
DAFTAR PUSTAKA **48**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 *Flowchart* Menentukan Determinan Matriks *Adjacency* $T_{n,1}$..... 6
Gambar 2.1 Graf G_1 8
Gambar 2.2 Graf G_2 8
Gambar 2.3 Graf G_3 11
Gambar 2.4 (i) Graf Tak Berarah dan (ii) Graf Berarah 12
Gambar 2.5 (i) Graf Sederhana dan (ii) Graf Tak Sederhana 12
Gambar 2.6 (i) Graf *Cycle* C_3, (ii) Graf Lengkap K_4 dan (iii) Graf Lintasan P_3 . 13
Gambar 2.7 *Pan Graph* $T_{5,1}$ 14
Gambar 2.8 Graf *Singleton* K_1 14
Gambar 3.1 *Pan Graph* $T_{3,1}$ 26
Gambar 3.2 *Pan Graph* $T_{4,1}$..... 27
Gambar 3.3 *Pan Graph* $T_{5,1}$ 29
Gambar 3 4 *Pan Graph* $T_{6,1}$ 31

DAFTAR SIMBOL

$G = \big(V(G), E(G)\big)$	: Graf G dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$
$\lvert V(G)\rvert$	: Banyaknya simpul graf G
$\lvert E(G)\rvert$	: Banyaknya sisi graf G
P_n	: Graf lintasan dengan n simpul
K_1	: Graf s*ingleton* dengan 1 simpul
K_n	: Graf lengkap dengan n simpul
$T_{n,1}$	: *Pan graph* dengan n simpul
C_n	: Graf c*ycle* dengan n simpul
$\lvert D\rvert$	: Matriks D
$\det(D)$	: Determinan dari matriks D
D^{-1}	: Invers matriks D
$A(T_{n,1})$.	: Matriks *adjacency pan graph*
a_{ij}	: Entri dari matriks A pada baris ke-i dan kolom ke-j dengan $i = 1,2,3,\dots,n$ dan $j = 1,2,3,\dots,n$
M_{ij}	: Minor dari entri a_{ij} dengan $i = 1,2,3,\dots,n$ dan $j = 1,2,3,\dots,n$
C_{ij}	: Kofaktor dari entri a_{ij} dengan $i = 1,2,3,\dots,n$ dan $j = 1,2,3,\dots,n$
■	: Akhir dari pembuktian

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan suatu cabang ilmu matematika diskrit yang menggambarkan objek-objek diskrit yang dinyatakan dengan simpul dan hubungan antara objek tersebut dinyatakan dengan sisi (Harary, 1994). Teori graf pertama kali digunakan pada masalah jembatan Konigsberg tahun 1736 (Munir, 2010). Graf dibentuk dari simpul yang umumnya dikenal dengan titik dan sisi sebagai garis yang menghubungkan antar simpul tersebut. Salah satu graf yang terdapat dalam teori graf adalah *pan graph*. *Pan graph* merupakan graf yang diperoleh dari graf *cycle* C_n dan graf *singleton* K_1 dengan penambahan sisi sebagai penghubung. Beberapa permasalahan yang berkaitan dengan graf dapat diselesaikan melalui sifat-sifat aljabar dan representasi graf dalam bentuk matriks. Graf dapat direpresentasikan ke dalam bentuk matriks, diantaranya yaitu matriks *adjacency.* Matriks *adjacency* $A(G)$ dari suatu graf sederhana dengan n simpul adalah matriks berukuran $n \times n$ yang entri baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 0 atau 1. Elemen α_{ij} dari matriks tersebut bernilai 1 jika terdapat sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j dan bernilai 0 jika tidak terdapat sisi yang menghubungkan keduanya. Matriks ini bersifat simetris untuk graf tidak berarah. Secara umum, suatu matriks diartikan sebagai kumpulan bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk suatu bangun persegi atau persegi panjang (Anton dan Rorres, 2004).

Salah satu pembahasan dalam teori matriks yaitu menentukan determinan suatu matriks. Determinan adalah konsep dasar aljabar linear yang memiliki peran penting untuk menyelesaikan permasalahan yang melibatkan matriks dan sering digunakan dalam berbagai bidang termasuk, matematika serta ilmu terapan. Determinan matriks merupakan nilai fungsi khusus yang menghubungkan suatu matriks persegi ke suatu bilangan real. Determinan suatu matriks dapat digunakan untuk menentukan nilai invers suatu matriks, jika nilai determinan matriks bernilai nol maka matriks tersebut tidak memiliki invers. Determinan juga dapat digunakan

dalam sistem persamaan linear, menentukan polinomial karakteristik dan beberapa bidang lainnya. Determinan matriks adalah suatu bilangan atau skalar yang dihasilkan dari perkalian dan penjumlahan elemen-elemen dalam matriks persegi dengan mengalikan elemen-elemen pada baris atau kolom dan kemudian menjumlahkan hasilnya. Dalam konteks graf, determinan matriks *adjacency* dapat memberikan informasi yang mengenai struktur dan sifat-sifat graf tersebut. Sifat-sifat determinan matriks *adjacency* memberikan wawasan tentang struktur graf. Determinan dapat digunakan untuk menentukan apakah graf tersebut terhubung atau tidak. Jika determinan matriks *adjacency* tidak sama dengan nol graf pasti terhubung. Graf yang tidak terhubung dapat memiliki determinan matriks *adjacency* yang bernilai nol, namun sebaliknya tidak selalu berlaku (Sugeng dkk., 2014).

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mempermudah pencarian determinan matriks, khususnya pada matriks berukuran besar seperti matriks *adjacency* dari *pan graph*, adalah dengan matriks blok. Matriks blok adalah diperoleh dari pembagian matriks persegi menjadi matriks yang lebih kecil dengan menambahkan garis horizontal dan garis vertikal antara baris dan kolom matriks. Matriks yang ukurannya kecil hasil partisi disebut submatriks. Matriks blok digunakan untuk menyederhanakan matriks yang ukuranya besar menjadi kecil sehingga lebih mudah dioperasikan untuk tujuan tertentu, salah satunya yaitu untuk mencari determinan dan invers matriks. Perhitungan determinan dapat dilakukan menggunakan sifat-sifat determinan matriks blok, seperti rumus determinan matriks blok yaitu dimisalkan $A, B, C,$ dan D matriks yang masing-masing berukuran $n \times n, n \times m, m \times n,$ dan $m \times m.$ Diasumsikan bahwa A dan D matriks nonsingular, maka $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$. Diasumsikan A matriks nonsingular maka $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$ dan jika D matriks nonsingular maka $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$.

Meskipun telah banyak penelitian yang membahas nilai determinan matriks *adjacency* pada jenis-jenis graf tertentu, seperti *path graph, cycle graph*, dan *complete graph*, kajian mengenai determinan matriks *adjacency* pada *pan graph* masih terbatas. Oleh karena itu, diperlukan penelitian lebih lanjut untuk menganalisis dan menentukan nilai determinan matriks *adjacency* pada *pan graph*, serta mengidentifikasi pola atau rumus umum yang dapat digunakan untuk menghitungnya secara efisien. Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menentukan nilai dan pola determinan matriks *adjacency* pada *pan graph.*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan rumusan masalah dari penelitian ini yaitu bagaimana menentukan nilai dan pola determinan matriks *adjacency* pada *pan graph.*

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang telah dirumuskan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan matriks *adjacency* dari $T_{n,1}$ untuk $n \geq 3$.
2. Menghitung determinan matriks *adjacency* $T_{n,1}$ untuk $n = 3, \dots, 10$.
3. Merumuskan dan membuktikan pola determinan matriks *adjacency* $T_{n,1}$ untuk $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam penelitian ini tidak meluas, maka batasan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Penelitian ini hanya memfokuskan pada *pan graph.*
2. Nilai n yang digunakan dalam penelitian ini dibatasi pada $3 \leq n \leq 10$.
3. Graf yang dikaji bersifat tidak berarah dan tidak memiliki sisi ganda maupun gelang (*loop*).
4. Matriks yang digunakan adalah matriks *adjacency* berukuran $(n+1) \times (n+1)$, yang merepresentasikan *pan graph* dengan $n+1$ simpul.

1.5 Tinjauan Pustaka

Penelitian tentang determinan matriks *adjacency* pada *pan graph* dikajikan dengan sistem studi pustaka. Setelah dilakukan kajian terhadap beberapa penelitian, terdapat buku dan artikel yang mendasari penelitian ini. Buku yang menjadi dasar penelitian ini yaitu buku karya Munir (2010) yang membahas tenteng teori graf dan buku karya Anton dan Rorres (2004) yang membahas tentang matriks.

Dalam artikel yang ditulis oleh Alsbaldo & Subhan (2021) determinan matriks ketetanggaan pada graf petersen ditemukan menggunakan konsep matriks segitiga atas dengan mengubah barisnya. Hasil yang di dapat yaitu menunjukkan bahwa determinan matriks ketetanggaan pada graf petersen bernilai positif.

Penelitian selanjutnya ditulis oleh Abdollahi (2009) telah menentukan determinan matriks ketetanggan dari graf K_n, P_n, dan C_n. Hasil yang di dapat menunjukan bahwa determinan matriks pada graf lengkap K_n yaitu $\det\big(A(K_n)\big) = (-1)^{n-1} \times (n-1)$, determinan matriks pada graf lintasan P_n yaitu $\det\big(A(P_n)\big) = 0$ untuk n ganjil, $(-1)^{\frac{n}{2}}$ untuk n genap, dan determinan matriks pada graf siklus C_n yaitu $\det\big(A(C_n)\big) = (-1)^n \times 2$.

Penelitian selanjutnya oleh Adsawatithisakul dan Samana (2014) telah menentukan determinan matriks ketetanggaan dari graf siklus berpangkat. Siklus kuadrat C_n^2 merupakan graf yang mempunyai n simpul sudut dan dua simpul sudut u dan v bertetangga jika dan hanya jika jarak antara u dan v tidak lebih besar dari 2. Dalam penelitian ini, di dapatkan bahwa determinan matriks ketetangga dari dari graf siklus kuadrat C_n^2 adalah sebagai berikut:

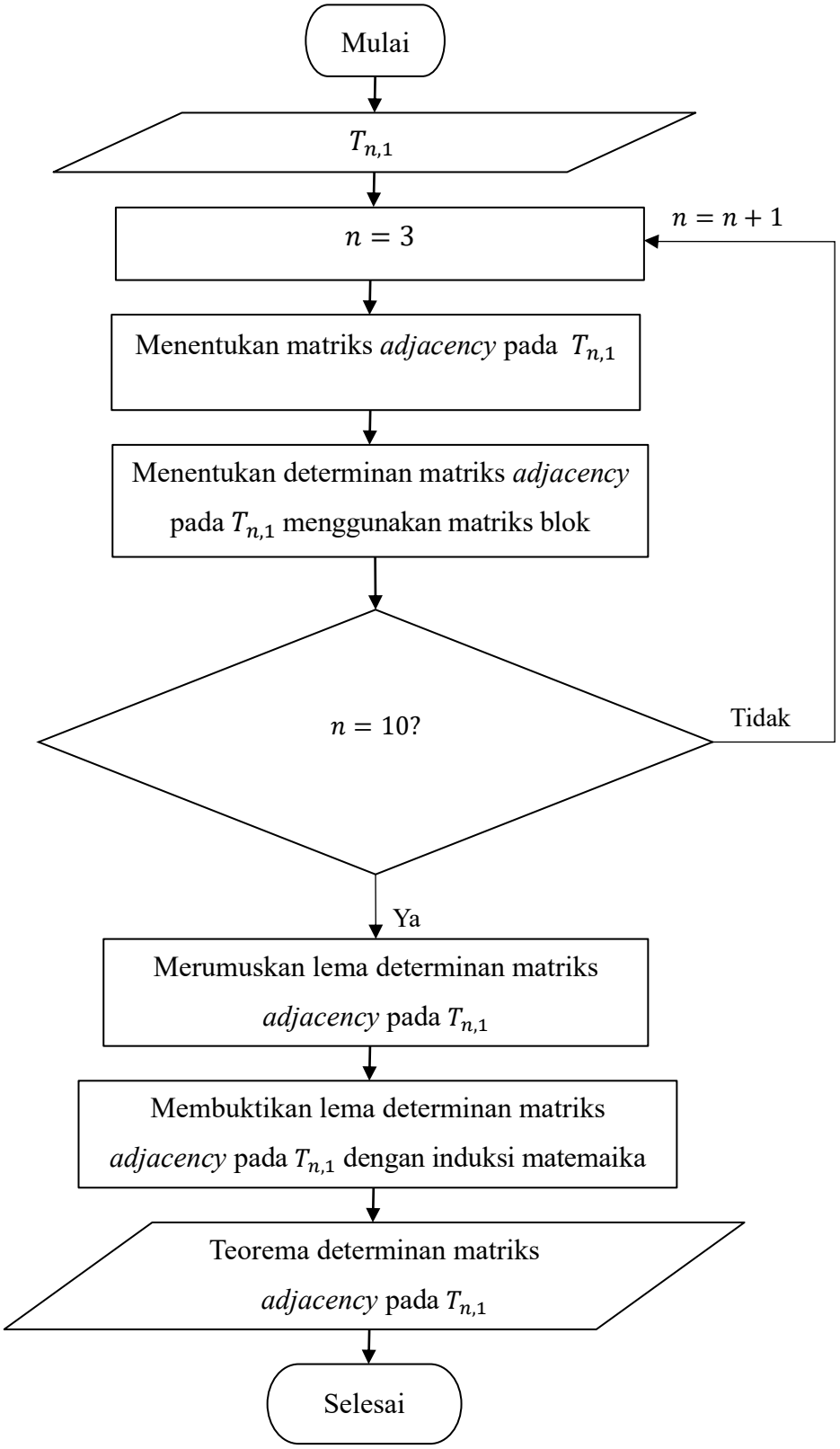
$$\det\big(A(C_n^2)\big) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0,2,4 \ mod\ 6 \\ 16, & n \equiv 3 \ mod\ 6 \\ 4, & n \equiv 1,5 \ mod\ 6 \end{cases}$$

Penelitian selanjutnya oleh Nasrul (2024) telah menentukan determinan matriks ketetanggan pada graf roda W_n. Hasil yang didapat menunjukan bahwa determinan matriks pada graf roda W_n yaitu:

$$\det(W_n) = \begin{cases} -n, & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}. \\ 0, & n = 4k, \quad k \in \mathbb{N}. \\ 2n, & n = 2(2k+1), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.6 Metodelogi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Studi literatur dimaksud untuk memahami teori terakit determinan matriks *adjacency* melalui buku, artikel, maupun jurnal ilmiah yang menunjang penelitian ini. Setelah melakukan studi literatur, selanjutnya diterapkan pada *pan graph*. Langkah yang dilakukan dalam menentukan determinan matriks *adjacency* pada *pan graph* dapat dijabarkan yaitu: dimulai dengan membentuk *pan graph* untuk $n \geq 3$, selanjutnya menentukan matriks *adjacency* pada *pan graph* , setelah menentukan matriks *adjacency*, tahap selanjutnya akan ditentukan nilai determinannya untuk setiap $T_{n,1}$. Setelah didapat determinan yang membentuk pola, selanjutnya akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika dan didapat sebuah teorema serta nilai determinan untuk setiap $T_{n,1}$. Secara ringkas metodologi penelitian ini dapat disajikan pada *flowchart* pada Gambar 1.1 berikut.



Gambar 1.1 *Flowchart* Menentukan Determinan Matriks *Adjacency* $T_{n,1}$