KETERKAITAN ANTARA SIFAT KOMPAK, KOMPAK SEKUENSIAL DAN BOLZANO-WEIERSTRASS PADA RUANG METRIK

NOVER LAUREN
H1011211042

SKRIPSI

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

KETERKAITAN ANTARA SIFAT KOMPAK, KOMPAK SEKUENSIAL DAN BOLZANO-WEIERSTRASS PADA RUANG METRIK

NOVER LAUREN
H1011211042

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2025

LEMBAR PENGESAHAN

Judul Tugas Akhir	: Keterkaitan Antara Sifat Kompak, Kompak Sekuensial dan *Bolzano-Weierstrass* Pada Ruang Metrik.
Nama Mahasiswa	: Nover Lauren
NIM	: H1011211042
Jurusan/Program Studi	: Matematika/Matematika
Tanggal Lulus	: 2 September 2024
SK Pembimbing	: No. 2562/UN22.8/TD.06/2024/Tanggal 2 September 2024
SK Penguji	: No. 2562/UN22.8/TD.06/2025/Tanggal 27 Agustus 2025

Dosen Pembimbing

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc.	Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc.
NIP 198105102005012003	NIP 197911152005011003

Dosen Penguji

Ketua Penguji	Anggota Penguji
Meliana Pasaribu, S.Pd., M.Sc.	Yudhi, S.Si., M.Si.
NIP 198710192019032006	NIP 198504072019031004

Pimpinan Sidang (merangkap anggota penguji)	Sekretaris Sidang (merangkap anggota penguji)
Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc.	Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc.
NIP 198105102005012003	NIP 197911152005011003

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Prof. Dr. Gusrizal, S.Si., M.Si.
NIP 197108022000031001

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nover Lauren
NIM	: H1011211042
Program Studi/Jurusan	: Matematika/Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas Akhir ini mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai ketentuan perundangan tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyataan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya

Pontianak, 22 Agustus 2025

Nover Lauren
NIM. H1011211042

Keterkaitan Sifat Kompak, Kompak Sekuensial dan Bolzano-Weierstrass Pada Ruang Metrik

Abstrak

Dalam analisis matematika, konsep jarak memainkan peranan penting dalam memahami sifat dan struktur dari suatu himpunan. Konsep jarak yang selama ini diketahui dalam kehidupan sehari-hari seperti tidak bernilai negatif, identitas yang sama, simetris, dan memenuhi pertidaksamaan segitiga, digeneralisasikan menjadi suatu konsep metrik. Suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik disebut dengan ruang metrik. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis sifat-sifat pada ruang metrik yaitu kompak, kompak sekuensial, dan Bolzano-Weierstrass pada ruang metrik kemudian melihat keterkaitan di antara sifat-sifat tersebut. Metode yang dilakukan dalam menganalisis keterkaitan sifat-sifat tersebut, adalah mempelajari dan memahami materi dasar, seperti aksioma-aksioma ruang metrik, himpunan terbuka dan himpunan tertutup, barisan dalam ruang metrik, dan liput himpunan. Dari hasil analisis itu diperoleh keterkaitan diantara kompak, kompak sekuensial, dan Bolzano-Weierstrass yaitu bersifat ekuivalen. Hal yang diperoleh yakni, jika ruang metrik X kompak maka X mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass, ruang metrik X mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass jika dan hanya jika X kompak sekuensial, dan ruang metrik X kompak jika hanya jika X kompak sekuensial.

Kata kunci: Jarak, Himpunan Terbuka, Himpunan Tertutup, Liput, Barisan.

The Relationship Among Compactness, Sequential Compactness, and the Bolzano–Weierstrass Property in Metric Spaces

Abstract

In mathematical analysis, the concept of distance plays an important role in understanding the properties and structure of a set. The concept of distance, which is familiar in everyday life, such as being non-negative, identical, symmetric, and satisfying the triangle inequality, is generalized into the concept of a metric. A non-empty set equipped with a metric is called a metric space. This research aims to analyze the properties of a metric space, namely compactness, sequential compactness, and the Bolzano-Weierstrass property, and then examine the relationships between these properties. The method used to analyze the relationships between these properties is to study and understand basic materials, such as the axioms of a metric space, open and closed sets, sequences in a metric space, and set covers. From the results of this analysis, it was found that the relationships between compactness, sequential compactness, and the Bolzano-Weierstrass property are equivalent. The findings are: if a metric space is compact, then it has the Bolzano-Weierstrass property; a metric space has the Bolzano-Weierstrass property if and only if it is sequentially compact; and a metric space is compact if and only if it is sequentially compact.

Keywords: *Distance, Open set, Closed set, Cover, Sequence.*

PRAKATA

Puji syukur atas kehadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkah, rahmat, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Keterkaitan Sifat Kompak, Kompak Sekuensial dan Sifat Bolzano-Weierstrass Pada Ruang Metrik" Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika di Universitas Tanjungpura.

Skripsi ini dapat terselesaikan berkat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Kedua orang tua saya yang telah memberikan doa dan dukungannya dan juga keluarga yang menjaga selama berada di pontianak, sehingga bisa sampai pada tahap penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing pertama dan Bapak Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing kedua yang telah banyak memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi ini.
3. Neva Satyahadewi, S.Si., M.Sc., CRA., CRP., CRMP. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang memberikan saran, masukan, dan motivasi kepada penulis selama proses perkuliahan.
4. Ibu Meliana Pasaribu, M.Sc. selaku dosen penguji pertama dan Bapak Yudhi, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji kedua yang telah memberikan masukan dan saran kepada penulis.
5. Sahabat penulis yang telah membersamai dan selalu memberi semangat.

Dengan demikian, penulis berharap skripsi dapat memberikan manfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan di bidang Matematika.

Pontianak, 22 Agustus 2024

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN ..... **ii**
PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK ..... **iii**
Abstrak ..... **iv**
Abstract ..... **v**
PRAKATA ..... **vi**
DAFTAR ISI ..... **vii**
DAFTAR GAMBAR ..... **viii**
DAFTAR SIMBOL ..... **ix**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan Penelitian 2
1.4 Batasan Masalah 2
1.5 Kajian Pustaka 2
1.6 Metodologi Penelitian 3
BAB II LANDASAN TEORI **6**
2.1 Ruang Metrik 6
2.2 Himpunan 11
2.3 Barisan pada ruang metrik 17
2.4 Liput (*Cover*) 20
BAB III HIMPUNAN DENGAN SIFAT KOMPAK, KOMPAK SEKUENSIAL DAN BOLZANO-WIERSTRASS PADA RUANG METRIK **23**
3.1 Himpunan Kompak 23
3.2 Sifat Bolzano-Weierstrass (BW) 25
3.3 Himpunan Kompak Sekuensial 28
3.4 Keterkaitan Kompak, Bolzano-Weierstrass, dan Kompak Sekuensial 33
BAB IV SIMPULAN **37**
DAFTAR PUSATAKA **38**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1 Diagram alur tahapan penelitian 5
Gambar 2. 1 Ilustrasi bola terbuka, luasan bola, dan bola tertutup. 13
Gambar 2. 2 Liput 22
Gambar 3.1 Ilustrasi dari sifat kompak, kompak sekuensial dan Bolzano-Weierstrass 36

DAFTAR SIMBOL

(X, d)	: Ruang metrik X dengan metrik d
$d(x, y)$	: Fungsi metrik yang menyatakan suatu jarak dari x ke y
$\mathbb{R}^n$	: Himpunan semua vektor berdimensi n $(n = 1, 2, \dots)$ atas $\mathbb{R}$
$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli
$P_n(x)$	: Himpunan semua polinomial berderajat paling tinggi n
2^X	: Himpunan kuasa dari X
$\emptyset$	: Himpunan kosong
A^c	: Komplemen dari himpunan A
$B_r(x_0)$	: Bola terbuka dengan pusat di x_0 dan jari-jari r
$S_r(x_0)$	: Luasan bola dengan pusat di x_0 dan jari-jari r
$\overline{B_r(x_0)}$	: Bola tertutup dengan pusat di x_0 dan jari-jari r
$\bar{A}$	: Himpunan tertutup terkecil yang memuat A.
β	: Koleksi semua himpunan bagian dari 2^X yang meliputi himpunan A dengan $A \subset X$
β'	: Koleksi semua himpunan bagian terbuka dari 2^X yang meliputi himpunan A dengan $A \subset X$
σ	: Koleksi himpunan bagian terbuka dari 2^X yang meliputi himpunan A dengan $\sigma \subset \beta'$
U	: Himpunan bagian dari β
U_a	: Himpunan bagian yang terbuka dari β'

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam analisis matematika, konsep jarak memainkan peranan penting dalam memahami sifat dan struktur dari suatu himpunan. Untuk mengumumkan gagasan tentang jarak yang dikenal seperti tidak bernilai negatif, identitas yang sama, simetris, dan memenuhi pertidaksamaan segitiga, digeneralisasikan menjadi suatu konsep metrik, maka diperkenalkanlah metrik. Suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik disebut dengan ruang metrik. Salah satu konsep dalam ruang metrik adalah himpunan kompak, yang menggabungkan ide-ide dari keterbatasan dan tertutupnya suatu himpunan. Konsep ini pertama kali diperkenalkan dalam ruang Euclidean oleh Henri Poincaré dan kemudian diperluas ke ruang metrik umum, di mana pengertian kekompakan menjadi dasar dalam pembahasan teori analisis matematika.

Suatu himpunan dalam ruang metrik dikatakan kompak jika setiap liput terbuka memuat liput bagian yang banyak anggotanya hingga. Sehingga dalam ruang metrik, himpunan kompak adalah himpunan yang diliput oleh suatu persekitaran terbuka dengan jumlah anggota terbatas (Royden, 2010). Dalam pengembangan lebih lanjut, keterkaitan antara himpunan kompak dan himpunan kompak sekuensial menjadi perhatian penting, juga dalam hubungannya dengan sifat Bolzano-Weierstrass**.**

Himpunan kompak sekuensial dalam ruang metrik dikatakan kompak jika setiap barisan di dalam himpunan tersebut memiliki barisan bagian yang konvergen ke suatu titik di dalam himpunan tersebut (Royden, 1988). Definisi ini memberikan hubungan erat antara kekompakan dengan konsep konvergensi dan limit barisan, yang merupakan elemen penting dalam studi kontinuitas dan kekontinuan fungsi. Sifat Bolzano-Weierstrass menyatakan bahwa setiap himpunan tak hingga di ruang metrik memiliki setidaknya satu titik limit (Darmawijaya, 2007). Hal ini memperkuat pemahaman bahwa sifat kompak dapat dilihat dari perspektif limit himpunan, yang relevan dalam banyak cabang analisis matematika.

Ruang metrik memiliki banyak aplikasi penting. Oleh karena itu, keterkaitan antara himpunan kompak, kompak sekuensial, dan ruang metrik dengan sifat Bolzano-Weierstrass pada ruang metrik memberikan landasan yang lebih luas dalam memahami perilaku fungsi, sifat-sifat barisan, dan limit himpunan dalam ruang metrik. Pemahaman yang mendalam tentang konsep-konsep ini diharapkan dapat menjadi sarana dalam melakukan studi lanjutan pada analisis real, topologi, serta aplikasinya dalam bidang ilmu fisika, teknik, ekonomi, maupun bidang ilmu terkait lainnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini yaitu bagaimana bentuk keterkaitan antara himpunan yang memiliki sifat kompak, sifat kompak sekuensial, dan sifat Bolzano-Weierstrass pada ruang metrik.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disajikan, maka tujuan dari penulisan tugas akhir ini, yaitu:

a. Mengkaji himpunan kompak pada ruang metrik.
b. Mengkaji himpunan kompak sekuensial pada barisan di ruang metrik.
c. Mengkaji himpunan dengan sifat Bolzano-Weierstrass pada ruang metrik.
d. Menganalisis keterkaitan antara himpunan kompak, himpunan kompak sekuensial, dan himpunan yang memiliki sifat Bolzano-Weierstrass pada ruang metrik.

1.4 Batasan Masalah

Dalam pembahasan tugas akhir ini permasalahan yang dibahas terbatas pada teorema yang terkait dengan himpunan kompak, himpunan kompak sekuensial, dan himpunan yang memiliki sifat Bolzano-Weierstrass pada ruang metrik.

1.5 Kajian Pustaka

Penelitian ini diacu dari beberapa jurnal dan buku sebagai dasar pemikiran dalam penulisan. Dalam acuan penyusunan skripsi ini, penulis menggunakan buku Pengantar Analisis Abstrak karya Prof. Dr. Soeparna Darmawijaya (2007). Dalam buku ini terdapat materi-materi terkait ruang metrik, seperti seperti aksioma-

aksioma ruang metrik, himpunan terbuka dan tertutup, barisan, liput himpunan, himpunan dengan sifat kompak, kompak sekuensial, dan sifat Bolzano-Weierstrass. Selain buku tersebut penulis juga menggunakan buku *Real Analysis* edisi ke 3 dan 4 (1988 dan 2010) karya Halsey Lawrence Royden.

Selain menggunakan buku sebagai acuan, penulis juga menggunakan beberapa jurnal sebagai acuan. Salah satunya adalah jurnal Putri (2019) dalam jurnalnya mengkaji mengenai ruang Hausdorff kompak yang mana kajian nya dilihat dari teorema yang berkaitan dengan ruang Hausdorff pada ruang topologi. Jurnal ini juga digunakan penulis sebagai sebagai bantuan dalam mempelajari himpunan kompak dan penyusunan skripsi.

Beberapa jurnal lainnya yang penulis gunakan sebagai acuan juga dalam mempelajari ruang metrik adalah Alwi (2021), Wahyuningsih (2020), dan Cece (2012). Dalam jurnal-jurnal tersebut berisi materi mengenai aksioma-aksioma ruang metrik, himpunan terbuka dan tertutup, barisan dan barisan bagian, liput himpunan dan himpunan kompak.

1.6 Metodologi Penelitian

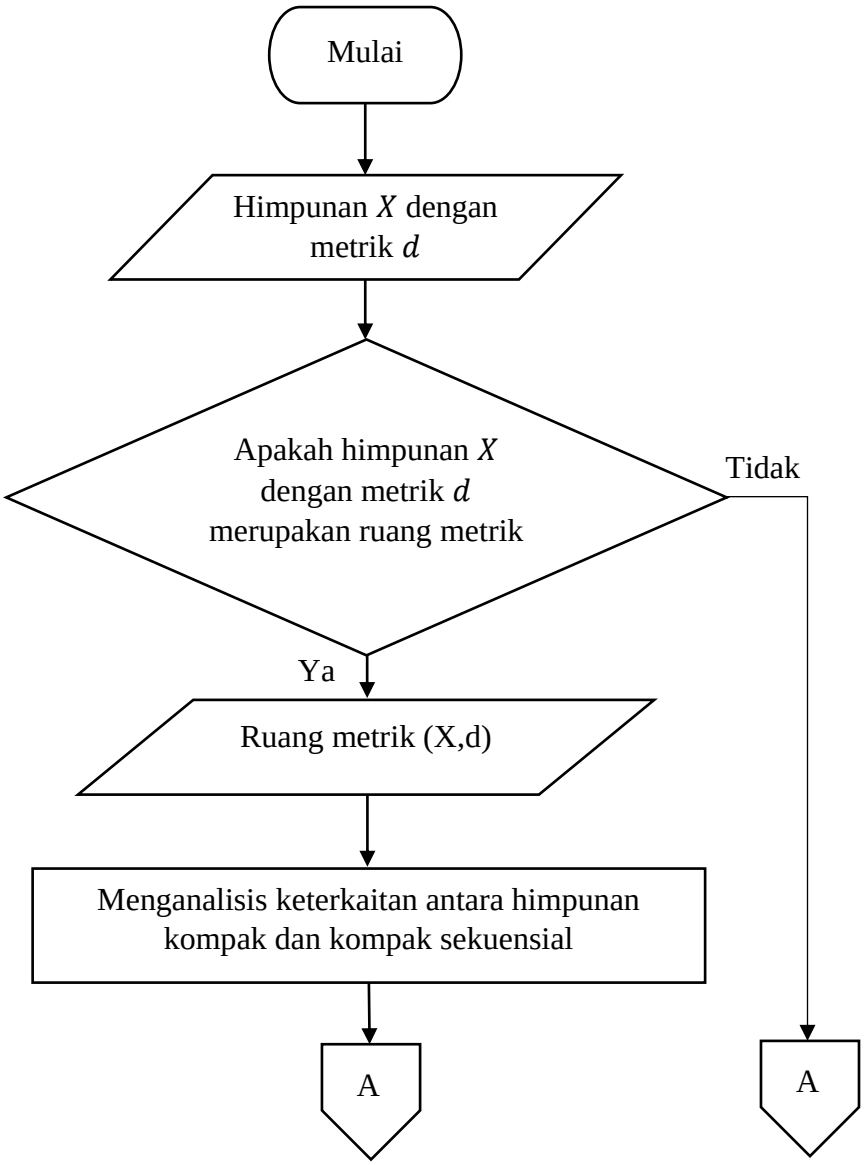
Penulisan dalam tugas akhir ini didasarkan pada studi literatur yaitu dengan mengumpulkan teori dan informasi yang berhubungan dengan materi tugas akhir ini. Sumber literatur yang digunakan berupa jurnal dan buku yang berhubungan dengan himpunan kompak, himpunan kompak sekuensial, dan himpunan dengan sifat Bolzano-Weierstrass, yang mana jurnal dan buku tersebut bersumber dari buku cetak maupun buku elektronik.

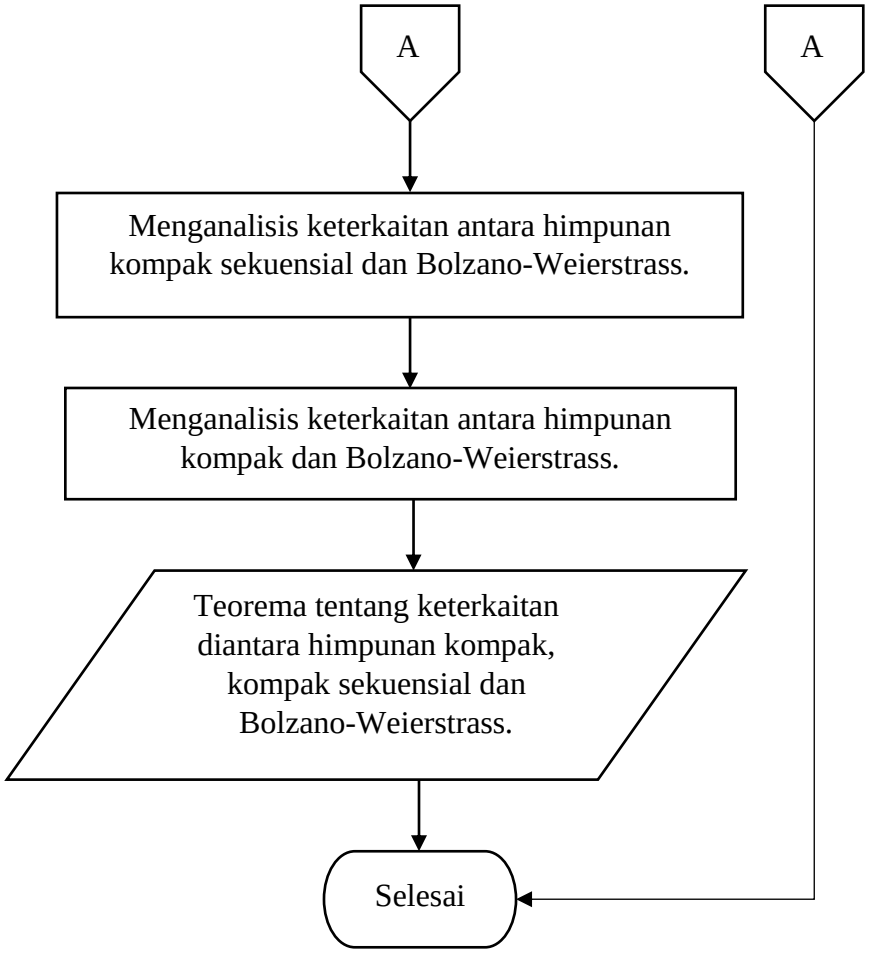
Secara umum, langkah-langkah dalam menentukan keterkaitan antara sifat kompak, kompak sekuensial dan Bolzano-Weierstrass sebagai berikut:

1) Mengambil sebarang himpunan X
2) Menentukan himpunan X merupakan ruang metrik
3) Jika iya, maka akan ditentukan apakah himpunan X merupakan himpunan kompak, himpunan kompak sekuensial, dan himpunan dengan sifat Bolzano-Weierstrass
4) Jika tidak, maka proses akan berhenti.

5) Menganalisis keterkaitan antara himpunan kompak, himpunan kompak sekuensial, dan himpunan dengan sifat Bolzano-Weierstrass.

Secara detail, alur untuk menentukan keterkaitan antara himpunan kompak, himpunan kompak sekuensial, dan himpunan dengan sifat Bolzano-Weierstrass. disajikan pada Gambar 1. 1 Diagram alur tahapan penelitian.





Gambar 1. 1 Diagram alur tahapan penelitian