PELABELAN RATA-RATA GEOMETRIS PADA GRAF ULAR mC_n

JUNJUNGAN DWIPA SAKTI SIMANJUNTAK
H1011191039

SKRIPSI

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2023

PELABELAN RATA-RATA GEOMETRIS PADA GRAF ULAR mC_n

JUNJUNGAN DWIPA SAKTI SIMANJUNTAK
H1011191039

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2023

LEMBAR PENGESAHAN

Judul Tugas Akhir	: Pelabelan Rata-rata Geometris Pada Graf Ular mCn
Nama Mahasiswa	: Junjungan Dwipa Sakti Simanjuntak
NIM	: H1011191039
Jurusan/Program Studi	: Matematika/Matematika
Tanggal Lulus	: 05 Desember 2023
SK Pembimbing	: No. 2580/UN22.8/TD.06/2023/Tanggal 04 Juli 2023
SK Penguji	: No. 4467/UN22.8/TD.06/2023/Tanggal 23 November 2023

Dosen Pembimbing

Pembimbing I

Fransiskus Fran, M.Si
NIP 198804152019031014

Pembimbing II

Yudhi, M.Si
NIP 198504072019031004

Dosen Penguji

Ketua Penguji

Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc
NIP 198105102005012003

Anggota Penguji

Nur'ainul Miftahul Huda, M.Si
NIP 199411142020122014

Pimpinan Sidang
(merangkap anggota penguji)

Fransiskus Fran, M.Si
NIP 198804152019031014

Sekretaris Sidang
(merangkap anggota penguji)

Yudhi, M.Si
NIP 198504072019031004

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Dr. Gusrizal, M.Si
NIP 197108022000031001

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Junjungan Dwipa Sakti Simanjuntak
NIM	: H1011191039
Program Studi/ Jurusan	: Matematika/Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas Akhir ini mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai ketentuan perundangan tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyataan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, 05 Desember 2023



Junjungan Dwipa Sakti Simanjuntak
H1011191039

PELABELAN RATA-RATA GEOMETRIS PADA GRAF ULAR mC_n

Abstrak

Pelabelan pada graf adalah suatu pemetaan yang memetakan setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (*edge*) atau himpunan titik (*vertex*) ke bilangan-bilangan bulat positif, yang disebut label. Satu diantara jenis pelabelan graf yaitu pelabelan rata-rata geometris. Pelabelan rata-rata geometris pada graf $G = (V(G), E(G))$ dengan p banyaknya titik dan q banyaknya sisi adalah fungsi injektif f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,3, \dots, q+1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f^* dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,3, \dots, q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$ berlaku $f^*(uv) = \left\lfloor \sqrt{f(u)f(v)} \right\rfloor$. Graf rata-rata geometris adalah graf yang dapat dilabelkan dengan pelabelan rata-rata geometris. Graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu graf ular mC_n dengan $n = \{5,6,7,8\}$ untuk $m \geq 1$. Tujuan dari penelitian ini yaitu mengkonstruksikan pola pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$. Penelitian dimulai dengan menetapkan graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$ serta melabeli graf tersebut dengan pelabelan rata-rata geometris. Pada penelitian ini diperoleh hasil konstruksi pola pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$. Sehingga, graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$ adalah graf rata-rata geometris.

Kata kunci : label, fungsi injektif, fungsi bijektif.

GEOMETRIC MEAN LABELLING OF mC_n SNAKE GRAPH

Abstract

Labeling in a graph is mapping that maps each element of the graph, namely the set of edges or the set of vertices, to positive integer numbers called labels. One of the types of graph labeling is geometric mean labeling. One type of graph labeling is geometric mean labeling. Geometric mean labeling on graphs $G = (V(G), E(G))$ with p vertices and q edges is an injective function f from the set of vertices $V(G)$ to the set of integers $\{1,2,3, \dots, q+1\}$, that induces the bijective function f^* from the set of edges $E(G)$ to the set of integers $\{1,2,3, \dots, q\}$ such that for every edge $e = uv \in E(G)$it holds that $f^*(uv) = \left\lfloor \sqrt{f(u)f(v)} \right\rfloor$. Geometric mean graph is a graph that can be labeled with geometric mean labeling. In this research, the graph used is the snake graph mC_n with $n = 5,6,7,8$ for $m \geq 1$. The aim of this research is to construct a pattern of geometric mean labeling on the snake graph $mC_n$with $n = 5,6,7,8$ for $m \geq 1$. The research starts by defining the snake graph $mC_n$with $n = 5,6,7,8$ for $m \geq 1$and labeling the graph with geometric mean labeling. This research resulted in the construction of a pattern of geometric mean labeling on the snake graph mC_n with $n = 5,6,7,8$. Therefore, the snake graph mC_n with $n = 5,6,7,8$ for $m \geq 1$ is a geometric mean graph

Keywords: *label, injective function, bijective function.*

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pelabelan Rata-rata Geometris Pada Graf Ular mC_n". Selama proses penyusunan skripsi ini, Penulis menyadari telah banyak mendapatkan bimbingan, motivasi, dan bantuan baik berupa spiritual maupun material dari berbagai pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapa terima kasih kepada:

1. Ayah dan Ibu yang penulis cintai dan sayangi yaitu Ayahanda Marsangkap Simanjuntak dan Ibunda Timbul Siagian yang selalu memberikan doa, dukungan dan motivasi yang tiada henti untuk penulis.
2. Bapak Fransiskus Fran, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing pertama dan Bapak Yudhi, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan bimbingan dan arahan dalam penulisan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Nilamsari Kusumastuti, M.Sc. selaku dosen penguji pertama dan Ibu Nur'ainul Miftahul Huda, M.Si. sebagai dosen penguji kedua yang memberikan arahan dan masukan dalam penulisan skripsi ini.
4. Teman-teman seperjuangan matematika angkatan 2019 yang selalu memberi dukungan dan saran untuk penulis.
5. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu

Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan kontribusi dan manfaat bagi kemajuan ilmu matematika serta membantu proses penelitian lebih lanjutnya. Kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat penulis harapkan demi memaksimalkan skripsi ini.

Pontianak, 05 Desember 2023

penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN ..... **ii**
PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK ..... **iii**
Abstrak ..... **iv**
Abstract ..... **v**
PRAKATA ..... **vi**
DAFTAR ISI ..... **vii**
DAFTAR GAMBAR ..... **viii**
DAFTAR SIMBOL ..... **ix**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.5 Tinjauan Pustaka 3
1.6 Metodologi Penelitian 4
BAB II LANDASAN TEORI **6**
2.1 Teori Graf 6
2.2 Amalgamasi Titik 10
2.3 Graf Isomorfik 11
2.4 Jenis-jenis Graf 12
2.5 Pelabelan Graf 15
2.6 Fungsi 15
BAB III PEMBAHASAN **19**
3.1 Pelabelan Rata-rata Geometris 19
3.2 Pelabelan Rata-rata Geometris Pada Graf Ular $mC5$ 20
3.3 Pelabelan Rata-rata Geometris Pada Graf Ular $mC6$ 34
3.4 Pelabelan Rata-rata Geometris Pada Graf Ular $mC7$ 50
3.5 Pelabelan Rata-rata Geometris Pada Graf Ular-$mC8$ 69
BAB IV KESIMPULAN 89
DAFTAR PUSTAKA **93**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 *Flowchart* Pelabelan Rata-rata geometris Graf Ular ular mC_n.....5
Gambar 2. 1 Graf G_0 7
Gambar 2. 2 (a) Bukan Graf Trivial G_1 , (b) Graf Trivial G_2, dan (c) Graf kosong G_3 8
Gambar 2. 3 Graf dengan Elemen Titik Terpencil 9
Gambar 2. 4 (a) Jalur, (b) Jalan, dan (c) Lintasan 10
Gambar 2. 5 Graf Terhubung 10
Gambar 2. 6 (a) Graf B dan (b) Graf H 11
Gambar 2. 7 Hasil Operasi amalgamasi titik Graf B dan Graf H 11
Gambar 2. 8 G_1 isomorfik dengan G_2 12
Gambar 2. 9 (a) Graf Sederhana, (b) Graf Ganda, dan (c) Graf Semu..... 13
Gambar 2. 10 Graf P_4 13
Gambar 2. 11 Graf C_4 13
Gambar 2. 12 Graf Ular mCn dengan $m = 3$ dan $n = 5$..... 14
Gambar 2. 13 (a) Pelabelan Titik, (b) Pelabelan sisi, (c) Pelabelan total..... 15
Gambar 2. 14 fungsi $f: A \rightarrow B$ 16
Gambar 2. 15 (a) Fungsi injektif, (b) Fungsi surjektif, dan (c) Fungsi bijektif... 17
Gambar 3. 1 (a) Graf Rata-rata Geometris, dan (b) Bukan Graf Rata-rata Geometris 20
Gambar 3. 2 Graf ular $3C_5$..... 21
Gambar 3. 3 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $1C_5$..... 22
Gambar 3. 4 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $2C_5$..... 23
Gambar 3. 5 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $3C_5$..... 25
Gambar 3. 6 Graf ular $3C_6$..... 35
Gambar 3. 7 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $1C_6$..... 36
Gambar 3. 8 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $2C_6$..... 38
Gambar 3. 9 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $3C_6$..... 40
Gambar 3. 10 Graf ular $3C_7$..... 50
Gambar 3. 11 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $1C_7$..... 52
Gambar 3. 12 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $2C_7$..... 54
Gambar 3. 13 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $3C_7$..... 56
Gambar 3. 14 Graf ular $3C_8$..... 70
Gambar 3. 15 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $1C_8$..... 71
Gambar 3. 16 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $2C_8$..... 73
Gambar 3. 17 Hasil Pelabelan Rata-rata Geometris pada Graf Ular $3C_8$..... 76

DAFTAR SIMBOL

$G = (V(G), E(G))$	: Graf G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik pada graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi pada graf G
mC_n	: Graf Ular yang terhubung dengan m blok isomorfik dengan graf siklus C_n
$\emptyset$	: Himpunan kosong
N_n	: Graf kosong dengan n titik
P_n	: Graf lintasan dengan n titik
C_n	: Graf siklus dengan n titik
$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli
$\lfloor n \rfloor$	: Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan n

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bagian ilmu matematika yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai bidang permasalahan, beberapa diantaranya digunakan untuk menyelesaikan permasalahan rangkaian listrik, jalur transportasi, pengujian program, dan lain sebagainya. Pelabelan graf merupakan salah satu topik pada teori graf (Munir, 2009). Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan unsur himpunan titik atau unsur himpunan sisi pada graf ke himpunan bilangan asli yang disebut dengan label (Chang dkk, 2000). Berdasarkan sejarah perkembangannya, pelabelan graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1964 oleh Sedlacek yang terinspirasi dari kasus persegi ajaib yang kemudian mencetuskan konsep pelabelan ajaib. Dia memberi label pada sisi-sisi graf dengan bilangan real dan mensyaratkan bahwa jumlah label dari semua sisi yang terkait langsung (*incident)* ke suatu simpul harus konstan. Pelabelan graf ajaib merupakan perluasan alami dari konsep persegi ajaib dan persegi panjang ajaib yang sudah terkenal. Asal-usul konsep persegi ajaib dapat ditelusuri lebih dari 4000 tahun yang lalu. Persegi ajaib pertama yang tercatat adalah persegi 3x3 yang disebut Lo Shu sekitar tahun 2200 SM. Menurut legenda tentang Kaisar Tiongkok Yu, dari kitab Yih King, diagram tersebut ditemukan pada cangkang kura-kura ilahi. Catatan pertama tentang persegi ajaib di Eropa ditemukan pada ukiran terkenal dari tahun 1514 oleh seniman dan ilmuwan Jerman Albrecht Dürer (kovar, 2004). Berdasarkan domain dari pelabelan, pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, jika domain berupa titik maka disebut pelabelan titik (*vertex labelling*), jika domain berupa sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labelling*), jika domain berupa simpul dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labelling*) (Cahayani dkk, 2013). Penerapan pelabelan graf banyak dalam bidang ilmu komputer, satu diantaranya yaitu digunakan untuk melacak jalur terpendek antara dua simpul dengan memberi bobot atau label pada setiap simpul yang menunjukkan jarak atau biaya (Romelta, 2003).

Ada banyak jenis pelabelan yang telah dikembangkan, satu diantaranya adalah pelabelan rata-rata geometris. Pelabelan rata-rata geometris pertama kali dikenalkan oleh A.Durai Baskar, S.Arockiaraj, dan B.Rajendran. Pelabelan rata-rata geometris pada graf $G = (V(G), E(G))$ dengan p banyaknya titik dan q banyaknya sisi adalah fungsi injektif f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,3, \dots, q+1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f^* dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,3, \dots, q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $e = uv$ berlaku $f^*(uv) = \left\lfloor \sqrt{f(u)f(v)} \right\rfloor$ (Baskar et al, 2013). Pelabelan rata-rata geometris memiliki banyak pengembangan, salah satu pengembangan dari pelabelan rata-rata geometris adalah pelabelan rata-rata geometris radio, yang mempelajari masalah penempatan saluran radio untuk menghindari gangguan pada sistem radio. Dalam pelabelan rata-rata geometris radio, simpul berperan sebagai stasiun pemancar dan labelnya berkaitan dengan saluran radio. Sisi berperan sebagai signal yang menghubungkan antar saluran radio, dan label pada sisi berkaitan dengan rentang frekuensi signal yang menghubungkan antar saluran radio (Elrokh, Shamiri, & Hay, 2023).

Hasil penelitian Baskar et.all, (2013) membuktikan gabungan graf siklus C_m dan C_n, graf ular mC_3, graf ular mC_4 merupakan graf rata-rata geometris. Berdasarkan penelitian tersebut penulis tertarik untuk membahas lebih lanjut mengenai pelabelan rata-rata geometris. Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$.

Graf ular mC_n dengan $m \geq 1$ adalah graf yang diperoleh dari sebuah lintasan sepanjang m dengan mengganti setiap sisinya dengan graf siklus C_n, untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 3$ (Baskar et al, 2013). Salah satu penerapan dari graf ular yaitu topologi jaringan komputer dimana graf ular dapat mempresentasikan topologi jalur dimana perangkat-perangkat dihubungkan. Hingga saat ini belum ada yang mengkaji pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$. Sehingga, penulis tertarik untuk melakukan penelitian untuk menguji lebih lanjut graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ merupakan termasuk dalam graf rata-rata geometris dan mengkonstruksi fungsi pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_n dengan

$n = 5,6,7,8$. Pemilihan graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$ juga dilatar belakangi karena graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$ merupakan graf sederhana dimana tidak ada sisi yang menghubungkan dua titik yang sama (sisi ganda).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana konstruksi pola pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menganalisis pelabelan rata-rata geometris.
2. Mengkonstruksi pola pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$.

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah graf yang digunakan yaitu graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$, dimana m merupakan blok isomorfik pada graf siklus C_n dengan $n = 5,6,7,8$. Diberikan $v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)}$ untuk $n \geq 3$ menjadi titik pada graf ular $\mathrm{mC_n}$ dari i^{th} salinan dari graf siklus $\mathrm{C_n}$ untuk $1 \leq i \leq m$.

1.5 Tinjauan Pustaka

Peneliti telah melakukan telaah terhadap beberapa literatur yang dijadikan acuan dalam penelitian ini. Beberapa peneliti sebelumnya telah menentukan bentuk umum pelabelan rata-rata geometris, misalnya Ponraj et.al, (2011) mendefinisikan bentuk umum pelabelan rata-rata geometris. Dalam penelitian ponraj et al (2011), suatu graf dapat dikatakan pelabelan rata-rata geometris jika suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dengan p titik dan q sisi adalah fungsi injektif f dari himpunan titik $V(G)$ kehimpunan bilangan $\{1,2,3, \ldots, q+1\}$ yang menginduksikan f^* dari himpunan sisi $E(G)$ kehimpunan bilangan $\{1,2,3, \ldots, q\}$ yang setiap $e = uv$ berlaku $f^*(uv) = \left\lfloor \sqrt{f(u)f(v)} \right\rfloor$, adalah bijektif. Hasil bentuk umum pelabelan rata-rata

geometris penelitian tersebut menjadi literatur pertama yang menjadi acuan dalam penelitian ini.

Penelitian selanjutnya oleh Baskar, et all (2013) mendefinisikan bentuk umum pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_3 untuk $m \geq 1$. Pada penelitian tersebut didefinisikan $f: V(G) \rightarrow (1,2,3, \ldots, 3m+1)$ dengan m titik potong blok lintasan pada siklus C_3, berlaku.

$f\left(v_1^{(i)}\right) = 3i - 2 \qquad 1 \leq i \leq m$

$f\left(v_2^{(i)}\right) = 3i \qquad 1 \leq i \leq m$

$f\left(v_3^{(i)}\right) = 3i + 1 \qquad 1 \leq i \leq m$

Dengan pelabelan sisi yang diinduksi, berlaku

$f^*\left(v_1^{(i)} v_2^{(i)}\right) = 3i - 2 \qquad 1 \leq i \leq m$

$f^*\left(v_2^{(i)} v_3^{(i)}\right) = 3i \qquad 1 \leq i \leq m$

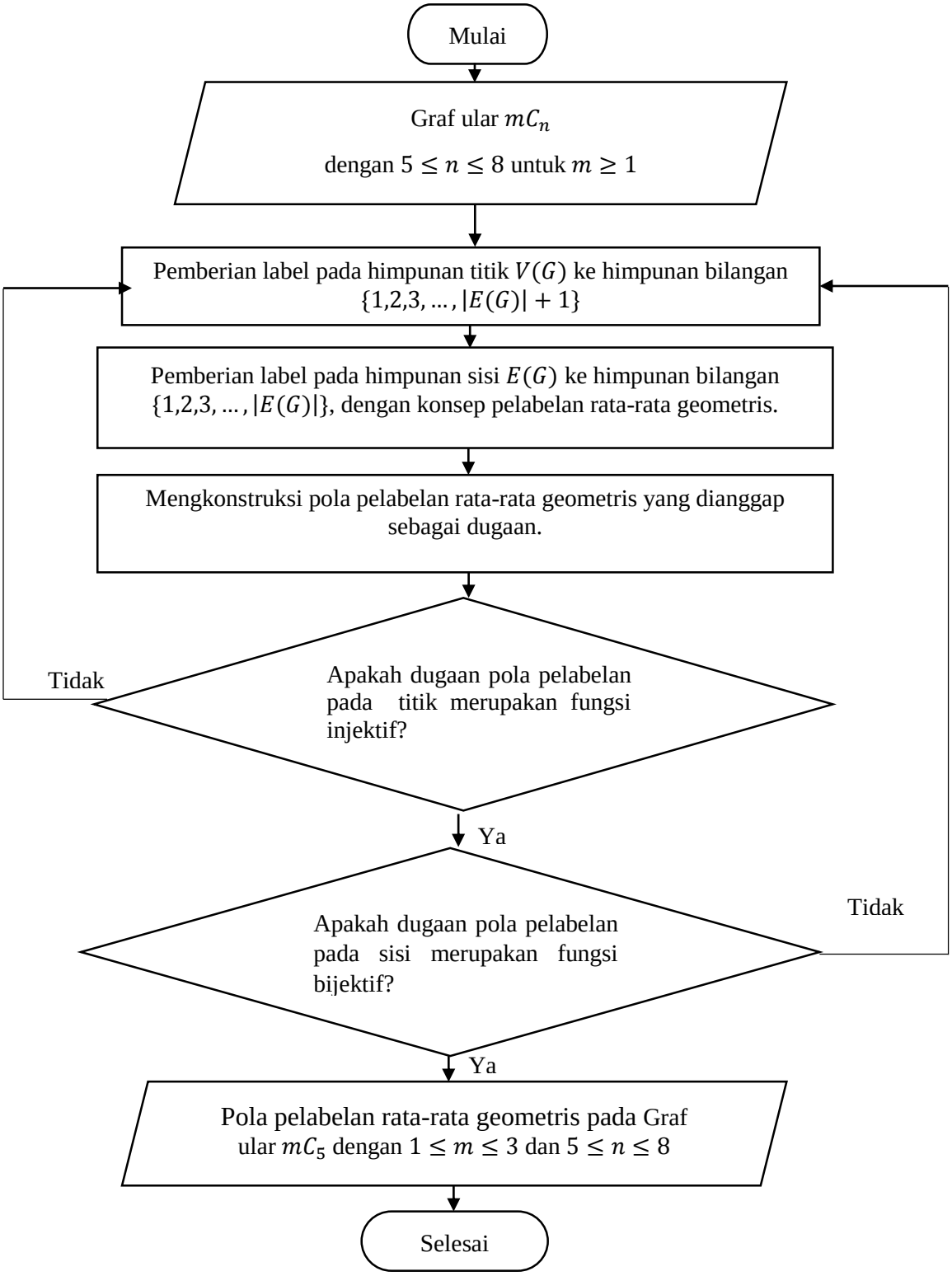
$f^*\left(v_1^{(i)} v_3^{(i)}\right) = 3(i) - 1 \qquad 1 \leq i \leq m$

Hasil pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_3 yang diperoleh pada penelitian tersebut menjadi literatur dalam penelitian ini.

1.6 Metodologi Penelitian

Metodologi yang digunakan pada penelitian ini adalah studi pustaka, yaitu dengan mencari literatur-literatur yang berhubungan dengan pelabelan rata-rata geometris pada graf. Literatur tersebut berupa buku, artikel pada jurnal dan penelusuran melalui internet. Dengan mempelajari teori graf dan semua materi yang berkaitan dengan penelitian ini menjadi tahap awal dalam penelitian ini. Selanjutnya menetapkangraf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$ sebagai graf yang akan dibahas, kemudian dilanjutkan dengan pemberian label pada titik, sehingga sisi dilabeli dengan rumus pelabelan rata-rata geometris dari graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$. Angka–angka yang memiliki pola tertentu adalah hasil dalam pelabelan tersebut sehingga membentuk beberapa pola pelabelan tertentu sehingga membentuk beberapa rumus yang dianggap sebagai dugaan. Pola pelabelan tersebut akan dibuktikan dengan konsep matematika. Secara detail,

flowchart pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_n dengan $n = 5,6,7,8$ untuk $m \geq 1$ disajikan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 *Flowchart* Pelabelan Rata-rata geometris Graf Ular ular mC_n