TRACE MATRIKS *TOEPLITZ* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

BARBARA DARAMITA TIARA
H1011221006

SKRIPSI

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2026

TRACE MATRIKS *TOEPLITZ* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

BARBARA DARAMITA TIARA
NIM H1011221006

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2026

LEMBAR PENGESAHAN

Judul Tugas Akhir	: *Trace* Matriks *Toeplitz* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif
Nama Mahasiswa	: Barbara Daramita Tiara
NIM	: H1011221006
Jurusan/Program Studi	: Matematika/Matematika
Tanggal Lulus	: 29 Juli 2026
SK Pembimbing	: No. 1606/DST/UN22.8/DT.00.09/2026/21 April 2026
SK Penguji	: No. 4832/DST/UN22.8/DT.00.09/2026/27 Juli 2026

Dosen Pembimbing

Pembimbing I	Pembimbing II
Meliana Pasaribu, S.Pd., M.Sc.	Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc.
NIP. 198710192019032006	NIP. 197911152005011003

Dosen Penguji

Ketua Penguji	Anggota Penguji
Fransiskus Fran, M.Si.	Yudhi, M.Si.
NIP. 198804152019031014	NIP. 198504072019031004

Pimpinan Sidang (merangkap anggota penguji)	Sekretaris Sidang (merangkap anggota penguji)
Meliana Pasaribu, S.Pd., M.Sc.	Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc.
NIP. 198710192019032006	NIP. 197911152005011003

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Prof. Dr. Gusrizal, S.Si., M.Si.
NIP. 197108022000031001

Dipindai dengan CamScanner

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Barbara Daramita Tiara
NIM	: H1011221006
Program Studi/Jurusan	: Matematika/Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas Akhir ini mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai ketentuan perundangan tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyataan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, 29 Juli 2026



Barbara Daramita Tiara
NIM. H1011221006

Dipindai dengan CamScanner

Trace Matriks _Toeplitz_ Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Abstrak

Perhitungan *trace* matriks berpangkat secara langsung menjadi semakin kompleks ketika ukuran matriks dan nilai pangkatnya semakin besar, sehingga diperlukan suatu bentuk umum yang lebih efisien. Namun, pada matriks diagonal dan matriks identitas *trace* dari matriks berpangkat dapat dilakukan secara langsung dengan menggunakan sifat-sifat dari *trace* matriks. Tujuan dari penelitian ini yaitu merumuskan bentuk umum trace dari matriks Toeplitz yang dipangkatkan dengan bilangan bulat positif. Matriks yang dianalisis didalam penelitian ini adalah matriks *Toeplitz* simetris A, dengan entri diagonal utamanya adalah 0 serta entri tepat diatas dan tepat dibawah dari diagonal utama adalah a, dengan a merupakan elemen bilangan real. Penelitian ini diawali dengan menentukan bentuk matriks A, kemudian melakukan perpangkatan pada matriks A untuk melihat pola pada entri-entri matriks. Selanjutnya menentukan bentuk umum matriks berpangkat dengan mencari nilai eigen beserta vektor eigen yang telah dinormalisasi dari matriks A, kemudian melakukan diagonalisasi ortogonal terhadap matriks A dengan menggunakan nilai eigen serta vektor eigen ternormalisasi yang sudah didapatkan. Dalam hal ini, diagonalisasi diterapkan untuk menyederhanakan proses penentuan bentuk umum *trace* dari perpangkatan matriks. Selanjutnya, membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks dan menentukan bentuk umum *trace* dari perpangkatan matriks. Dari hasil analisis, diperoleh trace dari perpangkatan matriks bernilai 0 untuk semua pangkat ganjil, sedangkan untuk pangkat genap diperoleh bentuk eksplisit yang menyatakan *trace* A^ksebagai jumlahan dari nilai-nilai eigen yang berpangkat. Bentuk umum *trace* dari perpangkatan matriks pada penelitian ini dapat digunakan untuk semua ordo terhadap struktur matriks yang dianalisis.

Kata Kunci: diagonalisasi ortogonal, nilai eigen, vektor eigen.

Trace of a Special-Form _Toeplitz_ Matrix With Positive Integer Ranks

Abstract

Calculating the trace of a matrix raised to a power becomes increasingly complex as the size of the matrix and the exponent increase, necessitating a more efficient general method. However, for diagonal matrices and identity matrices, the trace of a matrix raised to a power can be calculated directly using the properties of the trace of a matrix. The objective of this study is to derive a formula for the trace of a Toeplitz matrix raised to a positive integer power. The matrix analyzed in this study is a symmetric Toeplitz matrix A, where the entries on the main diagonal are 0 *and the entries immediately above and below the main diagonal are* a*, where* a *is a real number. This study begins by determining the from of matrix A, then raising matrix A to a power to identify patterns in the matrix entries. The next step is to determine the general from of the matrix to a power by finding the eigenvalues and normalized eigenvectors of matrix A, followed by performing orthogonal diagonalization on matrix A using the eigenvalues and normalized eigenvectors obtained. In this case, diagonalization was applied to simplify the prosess of determining the general formula fof the trace of a matrix raised to a power. Next, we approve the general bentuk for the matrix power and determine the general bentuk for the trace of a matrix power. From the analysis, we fine that the trace of a matrix power is* 0 *for all odd powers, while for even powers, we obtain an explicit from that expresses the trace of* A^k *as the sum of the eigenvalues raised to their respective powers. The general bentuk for the trace of a matrix raised to a power in this study can be applied to all orders of the analyzed matrix structures.*

Keywords: *diagonalization, orthogonal, eigenvalues, eigenvektors.*

PRAKATA

Puji Syukur Penulis ucapkan kepada Tuhan Yang Masa Esa atas berkat dan Rahmat-Nya, penulis dapat menyusun skripsi dengan judul "*Trace* Matriks *Toeplitz* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif" sebagai syarat untuk menyandang gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) pada Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura. Penulis skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya dukungan dari orang tua , keluarga, dan teman-teman serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis ingin mengungkapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua, teman-teman, dan keluarga yang telah memberikan doa dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Meliana Pasaribu, S.Pd.,M.Sc., selaku dosen pembimbing pertama dan Bapak Dr. Bayu Prihandono, M.Sc., selaku dosen pembimbing kedua, yang telah memberikan arahan dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Teman-teman mahasiswa matematika Angkatan 2022 yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.

Penulis berharap skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi para pembaca dan dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, 29 Juli 2026



Barbara Daramita Tiara

Dipindai dengan CamScanner

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN ..... **ii**
PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK ..... **iii**
Abstrak ..... **iv**
Abstract ..... **v**
PRAKATA ..... **vi**
DAFTAR ISI ..... **vii**
LAMPIRAN ..... **viii**
DAFTAR SIMBOL ..... **ix**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Batasan Masalah 3
1.5 Tinjauan Pustaka 4
1.6 Metodologi Penelitian 7
BAB II LANDASAN TEORI **10**
2.1 Matriks 10
2.2 Matriks *Toeplitz* 17
2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 18
2.4 Diagonalisasi Matriks 20
2.5 Bilangan Kompleks 22
2.6 Trigonometri 24
2.7 Rekursi dan Relasi Rekurensi 27
2.8 Induksi Matematika 28
BAB III *TRACE* MATRIKS BERPANGKAT **30**
3.1 Nilai Eigen 32
3.2 Vektor Eigen 39
3.3 *Trace* dari Matriks Berperpangkat 44
BAB IV KESIMPULAN **53**
DAFTAR PUSTAKA **54**

LAMPIRAN

Lampiran 1 Perpangkatan matriks A dari pangkat 2 hingga pangkat 5..... 56
Lampiran 2 Perpangkatan matriks D dari pangkat 2 hingga pangkat 3 57

DAFTAR SIMBOL

A	:	Matriks A
a_{qp}	:	Entri dari matriks A pada baris ke$-q$ dan kolom ke$-p$, dengan $q = 1,2,3, \dots, n$ dan $p = 1,2,3, \dots, n$.
λ_m	:	Nilai eigen ke$-m$ dari matriks A
D	:	Matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya merupakan nilai-nilai eigen dari matriks A.
$\boldsymbol{x}^{(m)}$	:	Vektor eigen ke$-m$ dengan $m = 1,2, \dots, n$.
$\boldsymbol{v}^{(m)}$	:	Vektor eigen ternormalisasi ke$-m$ dengan $m = 1,2, \dots, n$.
$v_q^{(m)}$		Komponen ke $-q$ dari vektor eigen ternormalisasi ke$-m$ dengan $m, q = 1,2, \dots, n$
P	:	Matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor eigen ternormalisasi.
P^T	:	*Transpose* dari matriks vektor eigen yang dinormalisasi.
$tr(A)$	:	*Trace* dari matriks A.
$\mathbb{R}$	:	Himpunan semua bilangan real.
$\mathbb{Z}$	:	Himpunan semua bilangan bulat.
θ	:	Sudut yang digunakan dalam merepresentasi nilai eigen.
z	:	Bilangan kompleks.
$\bar{z}$	:	Konjugat kompleks dari z.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam aljabar linear, matriks merupakan salah satu objek yang memiliki peran penting untuk menganalisis berbagai permasalahan matematika. Matriks memiliki berbagai jenis dan bentuk salah satunya adalah matriks *Toeplitz*. Matriks *Toeplitz* merupakan suatu matriks yang memiliki entri-entri konstan atau tetap pada setiap diagonal yang sejajar dengan diagonal utamanya (Meyer, 2023). Matriks *Toeplitz* banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial dan integral, fungsi *spline*, serta dalam berbagai permasalahan dan metode dalam bidang fisika, matematika, statistika, dan pengolahan sinyal (Gray, 2006).

Untuk menyelesaikan suatu permasalahan matriks *Toeplitz* diperlukan beberapa operasi matriks. Salah satu operasi yang sering digunakan adalah *trace* matriks. *Trace* matriks merupakan jumlahan entri-entri diagonal utama dari suatu matriks persegi. *Trace* dari matriks tidak terdefinisi apabila matriks tersebut bukan matriks persegi (Anton & Rorres, 2013). Dari definisi tersebut, untuk menentukan *trace* matriks cukuplah menjumlahkan entri-entri diagonal utama, dengan ketentuan matriks tersebut harus berbentuk matriks persegi. Akan tetapi, untuk menentukan *trace* dari matriks yang berordo $n \times n$ berpangkat k dengan k adalah bilangan bulat positif umumnya memerlukan langkah-langkah yang begitu panjang dan rumit, terutama untuk nilai k dan ukuran matriks yang digunakan sangat besar. Akibatnya, menentukan *trace* dari matriks berpangkat menjadi tidak mudah. Oleh karena itu, diperlukan bentuk umum *trace* dari matriks berpangkat. *Trace* dari matriks berpangkat digunakan dalam beberapa bidang misalnya seperti analisis numerik, teori graf, dan pada bidang-bidang lainnya. Selain itu, *trace* matriks berpangkat juga berkaitan dengan *closed walk* pada graf, dimana *trace* dari matriks berpangkat menyatakan jumlah lintasan pada graf tersebut sepanjang pangkat pada matriks (Aryani & Yulianis, 2018).

Penelitian tentang *trace* matriks berpangkat telah dilakukan oleh para peneliti-peneliti sebelumnya, diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Pahade dan Jha (2015) yang membahas tentang bentuk umum *trace* dari matriks

real berordo 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Pada penelitian ini, ordo matriks yang dibahas terbatas yaitu 2×2, sehingga hasil yang diperoleh belum dapat digeneralisasi untuk matriks ordo $n \times n$. Penelitian *trace* dari matriks berpangkat juga dilakukan oleh Marzuki dkk (2021) yang membahas tentang *trace* dari matriks berbentuk khusus berordo $n \times n$ dengan pangkat bilangan bulat positif dan setiap entri pada matriksnya memiliki nilai yang sama. Penelitian yang dilakukan oleh Marzuki dkk hanya berlaku pada struktur matriks dengan seluruh entri bernilai sama sehingga hasilnya tidak dapat diterapkan pada struktur lain. Selanjutnya, penelitian lain yang membahas tentang *trace* matriks juga dilakukan oleh Olii dkk (2021) yang membahas tentang *trace* dari matriks *Toeplitz* 2-tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Pada penelitian yang dilakukan oleh Olii dkk pembahasannya terbatas yaitu hanya menggunakan ordo 3×3, sehingga belum memenuhi bentuk umum untuk matriks yang berordo $n \times n$. Selain itu, penelitian tentang *trace* dari matriks berpangkat juga dilakukan oleh Rahmawati dkk (2019) yang membahas tentang *trace* matriks *Toeplitz* simetris berbentuk khusus dengan ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan diagonal utamanya adalah 0 dan pada bentuk matriks tersebut hanya terdapat satu konstanta sembarang pada entri-entri dibawah dan diatas diagonal utamanya. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Rahmawati dkk, hasil penelitiannya hanya berlaku untuk matriks khusus dengan ordo 3×3.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, jenis matriks dan ordo yang digunakan masih terbatas. Oleh karena itu, belum ditemukan bentuk umum *trace* dari matriks *Toeplitz* yang digunakan oleh Rahmawati dkk untuk ordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk mengembangkan bentuk umum *trace* matriks *Toeplitz* berpangkat bilangan bulat positif dengan ordo $n \times n$. Bentuk matriks yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

dengan a merupakan bilangan real dan $a \neq 0$.

Bentuk matriks yang diteliti didalam penelitian ini dapat digunakan dalam teori graf. Matriks tersebut merepresentasikan hubungan antar titik pada graf lintasan. Berdasarkan hal tersebut, *trace* dari matriks berpangkat berkaitan dengan banyaknya *walk* tertutup pada graf, karena *trace* A^k merupakan jumlah seluruh *walk* tertutup sepanjang k yang berawal dan berakhir disimpul yang sama.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, dapat diambil rumusan masalah yaitu bagaimana bentuk umum *trace* dari matriks *Toeplitz* berbentuk khusus ordo $n \times n$ dengan pangkat bilangan bulat positif.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, tujuan dari penelitian ini diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan bentuk umum perpangkatan matriks *Toeplitz* simetris berbentuk khusus ordo $n \times n$ dengan pangkat bilangan bulat positif.
2. Menentukan bentuk umum *trace* matriks *Toeplitz* simetris berbentuk khusus ordo $n \times n$ dengan pangkat bilangan bulat positif.

1.4 Batasan Masalah

Pada penelitian ini dibahas mengenai bentuk umum *trace* dari matriks *Toeplitz* simetris bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan didalam penelitian ini adalah matriks *Toeplitz* berordo $n \times n$ dengan diagonal utamanya adalah 0 serta entri diagonal tepat diatas dan tepat dibawah diagonal utama adalah a, dimana $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$.

1.5 Tinjauan Pustaka

Trace dari matriks berpangkat telah diteliti oleh para peneliti sebelumnya. Diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Pahade dan Jha (2015) yang membahas tentang bentuk umum *trace* dari matriks real ordo 2×2 dengan pangkat bilangan bulat positif. Bentuk matriks yang analisis oleh Pahade dan Jha adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Pada penelitian tersebut, langkah pertama yang dilakukan oleh Pahade dan Jha adalah dengan menghitung perkalian terhadap matriks A dengan matriks A itu sendiri kemudian menghitung *trace* dari hasil perkalian matriks yang telah dilakukan dengan cara menjumlahkan diagonal utamanya. Kemudian, dengan menggunakan cara yang sama untuk pangkat 3,4,5 hingga pangkat 8. Setelah melakukan perpangkatan matriks dan menghitung nilai *trace* nya Pahade dan Jha menemukan pola *trace* dari matriks yang berpangkat hingga pangkat n dengan n bilangan bulat positif. Bentuk umum *trace* matriks yang diperoleh oleh Pahade dan Jha adalah sebagai berikut:

Untuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif genap

$$Tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \dots (DetA)^r (TrA)^{n-2r}.$$

Untuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif ganjil

$$Tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \dots (DetA)^r (TrA)^{n-2r}$$

(Pahade & Jha, 2015).

Penelitian yang dilakukan oleh Marzuki dkk (2021) membahas tentang bentuk umum *trace* matriks khusus ordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif. Bentuk matriks yang digunakan adalah $A_n = \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$ dengan $a \in \mathbb{R}$. Didalam penelitian tersebut, langkah yang dilakukan Marzuki dkk berbeda dengan

Pahade dan Jha. Pada penelitian ini, hal pertama yang dilakukan adalah dengan memangkatkan matriks A_n dari pangkat 2 hingga pangkat 5. Setelah melakukan perpangkatan pada matriks A_n diperoleh pola perpangkatannya. Dari pola perpangkatan tersebut diperoleh persamaan umum perpangkatan dari matriks A_n hingga pangkat m dengan m adalah bilangan bulat positif. Bentuk umum perpangkatan matriks yang dilakukan oleh Marzuki dkk adalah sebagai berikut:

$$A_n^m = \begin{bmatrix} n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \cdots & n^{m-1}a^m \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \cdots & n^{m-1}a^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \cdots & n^{m-1}a^m \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan bentuk umum perpangkatan yang telah diperoleh marzuki dkk, bentuk umum *trace* dari matriks A_n^m adalah sebagai berikut:

$$Tr(A_n^m) = (na)^m$$

(Marzuki dkk, 2021).

Penelitian yang dilakukan oleh Olii dkk (2021) membahas tentang bentuk umum *trace* matriks *Toeplitz* 2- ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Bentuk matriks yang dianalisis dalam penelitian ini yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Metode yang digunakan didalam penelitian ini mirip dengan metode yang digunakan oleh Marzuki dkk yaitu hal pertama yang dilakukan adalah melakukan perpangkatan pada matriks hingga mendapatkan pola perpangkatannya kemudian menentukan bentuk umum perpangkatan matriks dan kemudian menentukan bentuk umum *trace* matriks berpangkat berdasarkan bentuk umum yang telah diperoleh. Pada penelitian yang dilakukan oleh Olii dkk langkah yang pertama yang dilakukan adalah melakukan perpangkatan pada matriks *A* yang dimulai dari pangkat 2 hingga pangkat 13. Dari hasil pangkat 2 hingga pangkat 13 diperoleh pola pada setiap entri matriks yang ditulis dalam bentuk notasi sigma. Berdasarkan pola perpangkatan, diperoleh dua bentuk umum perpangkatan pada matriks *A* yaitu bentuk umum untuk pangkat bilangan bulat positif ganjil dan berpangkat bilangan bulat positif genap yaitu:

$$A^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i \end{bmatrix}$$

untuk n ganjil, $n > 0, n \in \mathbb{Z}$ dan

$$A^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i \end{bmatrix}$$

untuk n genap, $n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$.

Berdasarkan bentuk umum perpangkatan matriks tersebut, diperoleh bentuk umum *trace* matriksnya dengan menjumlahkan entri pada diagonal utamanya.

$$Tr(A^n) = \begin{cases} a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, n\ ganjil, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, n\ genap, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(Olii dkk, 2021).

Penelitian yang dilakukan oleh Rahmawati dkk (2019) meneliti tentang bentuk umum *trace* matriks *Toeplitz* simetris bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Pada penelitian tersebut, bentuk matriks yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \text{dengan } a \in \mathbb{R}.$$

Penelitian yang dilakukan oleh Rahmawati dkk memiliki metode yang mirip dengan penelitian yang dilakukan oleh Marzuki dkk serta Olli dkk. Dalam penelitian ini, hal yang pertama dilakukan adalah dengan memangkatkan matriks

dari pangkat 2 hingga pangkat 12, kemudian menentukan pola dari hasil perpangkatan. Berdasarkan pola tersebut, diperoleh bentuk umum perpangkatan pada matriks yaitu sebagai berikut:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \end{bmatrix} & ,untuk\ n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \end{bmatrix} & ,untuk\ n\ genap \end{cases}.$$

Dengan demikian diperoleh bentuk umum *trace* dari matriks A_3^n adalah

$$tr(A_3^n) = \begin{cases} 0 & ,n\ ganjil \\ 2^{\frac{n}{2}+1}a^n, & ,n\ genap \end{cases}$$

(Rahmawati dkk, 2019).

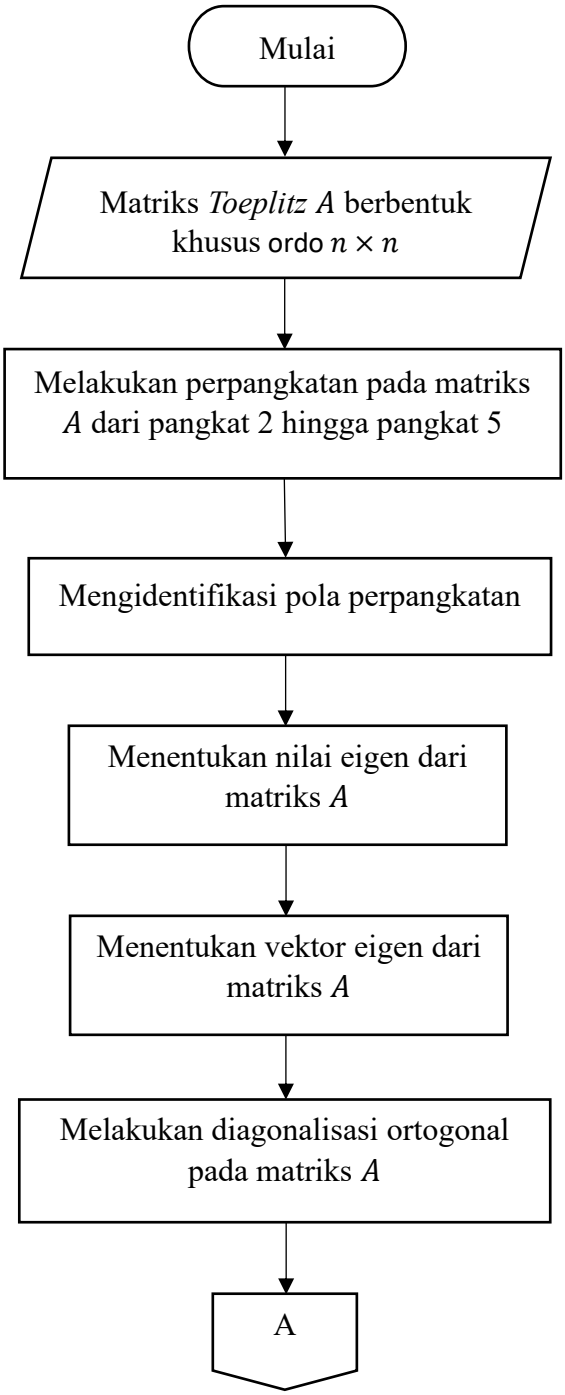
1.6 Metodologi Penelitian

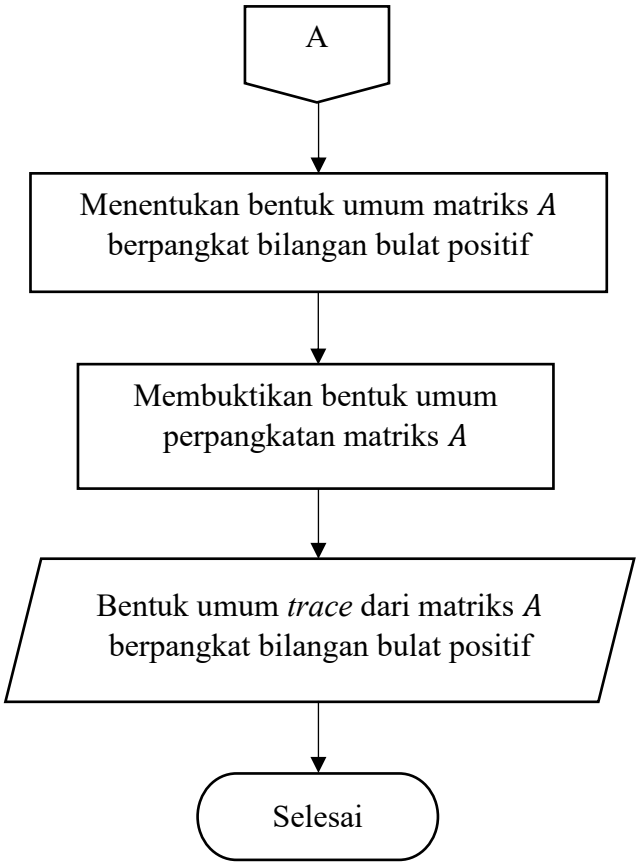
Penelitian ini merupakan penelitian matematika murni yang menggunakan pendekatan analisis melalui studi literatur. Analisis dilakukan dengan memanfaatkan konsep aljabar linear khususnya teori nilai eigen, vektor eigen, diagonalisasi matriks, dan sifat-sifat *trace* matriks untuk memperoleh bentuk umum perpangkatan matriks serta *trace* dari matriks berpangkat.

1. Menentukan objek penelitian berupa matriks *Toeplitz* simetris $n \times n$ yang dinotasikan dengan matriks A.
2. Melakukan perpangkatan pada matriks A dari pangkat 2 hingga pangkat 5.
3. Menentukan nilai eigen dari matriks A
4. Menentukan vektor eigen dari matriks A
5. Menentukan bentuk umum perpangkatan matriks melalui proses diagonalisasi ortogonal menggunakan dekomposisi spektral $A = PDP^T$.
6. Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks A menggunakan sifat-sifat diagonalisasi matriks dan pembuktian matematis.
7. Menentukan bentuk umum *trace* dari matriks A yang dipangkatkan dengan bilangan bulat positif.

8. Membuktikan kebenaran bentuk umum *trace* dari matriks A berpangkat bilangan bulat positif.

Berikut ini flowchart dari langkah-langkah tahapan metodologi penelitian pada Gambar 1.1





Gambar 1 1. *Flowchart* bentuk umum *trace* dari matriks berpangkat.