KETERKAITAN SIFAT KOMUTATIF PERKALIAN MATRIKS DENGAN DIAGONALISASI MATRIKS SECARA SIMULTAN

TIARA SEPTIANTI
NIM H1011221009

SKRIPSI

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2026

KETERKAITAN SIFAT KOMUTATIF PERKALIAN MATRIKS DENGAN DIAGONALISASI MATRIKS SECARA SIMULTAN

TIARA SEPTIANTI
NIM H1011221009

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS TANJUNGPURA
PONTIANAK
2026

LEMBAR PENGESAHAN

Judul Tugas Akhir	: Keterkaitan Sifat Komutatif Perkalian Matriks dengan Diagonalisasi Matriks Secara Simultan
Nama Mahasiswa	: Tiara Septianti
NIM	: H1011221009
Jurusan/Program Studi	: Matematika/Matematika
Tanggal Lulus	: 23 Juli 2026
SK Pembimbing	: No. 1607/DST/UN22.8/DT.00.09/2026/21 April 2026
SK Penguji	: No. 4446/DST/UN22.8/DT.00.09/2026/20 Juli 2026

Dosen Pembimbing

Pembimbing I	Pembimbing II
Fransiskus Fran, S.Si., M.Si.	Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc.
NIP. 198804152019031014	NIP. 198105102005012003

Dosen Penguji

Ketua Penguji	Anggota Penguji
Yudhi, S.Si., M.Si.	Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc.
NIP. 198504072019031004	NIP. 197911152005011003

Pimpinan Sidang (merangkap anggota penguji)	Sekretaris Sidang (merangkap anggota penguji)
Fransiskus Fran, S.Si., M.Si.	Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc.
NIP. 198804152019031014	NIP. 198105102005012003

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Prof. Dr. Gusrizal, S.Si., M.Si.
NIP. 197108022000031001

PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Tiara Septianti
NIM	: H1011221009
Program Studi/Jurusan	: Matematika/Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan ini menyatakan bahwa dokumen ilmiah Tugas Akhir yang disajikan ini tidak mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 39 Tahun 2021. Apabila di kemudian hari dokumen ilmiah Tugas Akhir ini mengandung unsur pelanggaran integritas akademik sesuai ketentuan perundangan tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi akademik dan/atau sanksi hukum yang berlaku.

Demikian pernyataan ini untuk digunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, 24 Juni 2026



Tiara Septianti
NIM. H1011221009

Keterkaitan Sifat Komutatif Perkalian Matriks Dengan Diagonalisasi Matriks Secara Simultan

Abstrak

Diagonalisasi matriks secara simultan merupakan suatu proses transformasi dua matriks persegi secara bersamaan menjadi bentuk matriks diagonal. Proses ini dapat dilakukan apabila kedua matriks yang dapat didiagonalisasi tersebut saling komutatif. Selain itu, sifat komutatif ini memiliki beberapa sifat yang berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen, lalu untuk menentukan dua matriks saling komutatif tidak sederhana. Sehingga, jika dua matriks saling komutatif akan memiliki sifat-sifat khusus yang berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen. Penelitian ini bertujuan mengkaji sifat-sifat dari dua matriks yang saling komutatif, serta melakukan proses diagonalisasi secara simultan, dan merekontruksi matriks B komutatif dengan matriks A yang dapat didiagonalisasi. Mengkaji sifat-sifat tersebut dimulai dengan dua matriks persegi yang saling komutatif yang terkait nilai eigen dan vektor eigen, lalu merekontruksi matriks khusus. Proses diagonalisasi secara simultan dimulai dengan dua matriks yang saling komutatif, menentukan nilai eigen dan vektor eigen, menentukan matriks P dan P^{-1}, sehingga diperoleh matriks diagonal dari kedua matriks tersebut. Konstruksi matriks B dimulai dengan ambil sebarang matriks A yang dapat didiagonalisasi, kemudian menentukan matriks P dan P^{-1}, lalu ambil sebarang matriks diagonal D_2 untuk matriks B, menghitung $B = PD_2P^{-1}$, sehingga diperoleh matriks B yang komutatif dengan matriks A. Hasil dari keterkaitan dari sifat-sifat tersebut jika matriks A memiliki n nilai eigen real yang berbeda, maka matriks B juga memiliki n nilai eigen real dengan vektor eigen yang sama dengan matriks A. Kesamaan vektor eigen tersebut menghasilkan matriks P yang sama, sehingga diperoleh $P^{-1}AP = D_1$ dan $P^{-1}BP = D_2$ sebagai hasil diagonalisasi secara simultan dari matriks A dan B.

Kata kunci: nilai eigen, vektor eigen, ruang eigen

The Relationship Between The Commutative Property Of Matrix Multiplication And Simultaneous Matrix Diagonalization

Abstract

Simultaneous diagonalization of matrices is a process of transforming two square matrices simultaneous into diagonal form. This process can be performed if the two matrices are commutative. In addition, this commutative property has several characteristics related to eigenvalues and eigenvectors, so that determining two commuting matrices is not simple. Thus, if two commuting matrices are diagonalizable, they will have special properties related to eigenvalues and eigenvectors. This study aims to examine the properties of two commutative matrices, perform the simultaneous diagonalization process, and reconstruct a matrix B that commutes with a diagonalizable matrix A. The study of these properties begins with two commutative square matrices, examines properties related to eigenvalues and eigenvectors, and then reconstructs specific matrices. The simultaneous diagonalization process begins with two commutative square matrices, determines the eigenvalues and eigenvectors, determines matriks P and P^{-1}, and determines the diagonal matrices of both matrices. Construction of matrix B begins by taking an arbitrary diagonalizable matrix A, then determining matrices P and P^{-1}, then taking an arbitrary diagonal matrix D_2 for matrix B, computing $B = PD_2P^{-1}$, so that a matrix B that commutes with matrix A is obtained. The result of this relationship is that if matrix A has n distinct real eigenvalues, then matrix B also has n real eigenvalues with the same eigenvectors as matrix A. This equality of eigenvectors results in the same matrix P, so that $P^{-1}AP = D_1$ and $P^{-1}BP = D_2$ are obtained as the result of simultaneous diagonalization of matrices A and B.

Keywords: eigenvalues, eigenvector, eigenspace

PRAKATA

Dengan segala kerendahan hati, penulis mengucapkan puji Syukur kehadirat Tuhan Yang Masa Esa atas berkat dan Rahmat-Nya, penulis dapat menyusun skripsi dengan judul "Keterkaitan Sifat Komutatif Perkalian Matriks dengan Diagonalisasi Matriks Secara Simultan" sebagai syarat untuk menyandang gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) pada Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya dukungan serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis ingin mengungkapkan rasa berterima kasih kepada:

1. Kedua orang tua tercinta, Ayahanda Abdul Hadi dan Almarhumah Ibunda Sutimi, serta kedua saudara penulis, Razack Rachmatdhani dan Doni Surya Imam Ramadhan, yang senantiasa telah memberikan doa dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Fransiskus Fran, S.Si., M.Si. dan Ibu Dr. Nilamsari Kusumastuti, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk memberikan bimbingan dan arahan dengan penuh kesabaran dalam penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Yudhi, S.Si., M.Si. dan Bapak Dr. Bayu Prihandono, S.Si., M.Sc. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan saran yang membangun untuk kesempurnaan skripsi ini.
4. Seluruh Dosen dan Staf Administrasi Program Studi Matematika yang telah membekali penulis dengan ilmu pengetahuan selama masa perkuliahan serta membantu kelancaran urusan administrasi.
5. Teruntuk Khayra Argista sebagai teman terdekat diperkulihan ini dari masa awal perkuliahan sampai diakhir masa perkuliahan, terima kasih karena sudah menemani dalam penyusunan skripsi dan memberikan dukungan dalam penyusunan skripsi ini.

6. Teruntuk seseorang yang telah menemani penulis dari awal, terima kasih telah menjadi seseorang yang mendengarkan keluh kesah, menemani dalam penyusunan skripsi ini, dan senantiasa selalu memberikan dukungan untuk tetap semangat.
7. Keluarga mahasiswa matematika Angkatan 2022 yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.

Penulis berharap skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi para pembaca dan dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Pontianak, 23 Februari 2026



Tiara Septianti

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN ..... **ii**
PERNYATAAN INTEGRITAS AKADEMIK ..... **iii**
Abstrak ..... **iv**
Abstract ..... **v**
PRAKATA ..... **vi**
DAFTAR ISI ..... **viii**
DAFTAR GAMBAR ..... **ix**
DAFTAR SIMBOL ..... **x**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Batasan Masalah 3
1.5 Tinjauan Pustaka 3
1.6 Metodologi Penelitian 4
BAB II LANDASAN TEORI **9**
2.1 Operasi dan Sifat-Sifat Matriks 9
2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 17
2.3 Diagonalisasi Matriks 20
BAB III SIFAT-SIFAT MATRIKS YANG SALING KOMUTATIF DAN DIAGONALISASI SECARA SIMULTAN **25**
3.1 Sifat-Sifat Matriks yang Saling Komutatif 25
3.2 Diagonalisasi Secara Simultan 35
BAB IV KESIMPULAN **49**
DAFTAR PUSTAKA **50**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Diagram Alir Sifat-Sifat Matriks yang Saling Komutatif..... 6
Gambar 1.2 Diagram Alir Diagonalisasi Secara Simultan 7
Gambar 1.3 Mengonstruksi Matriks B yang Komutatif dengan Matriks A yang Dapat Didiagonalisasi 8

DAFTAR SIMBOL

$M_n(\mathbb{R})$	: Himpunan matriks persegi dengan entri di $\mathbb{R}$.
$p(\lambda)$	: Persamaan karakteristik dengan nilai eigen λ.
λ_n	: Nilai eigen ke-n.
$\boldsymbol{v_n}$	: Vektor eigen ke-n.
E_λ	: Ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.
$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	: Matriks diagonal dengan entri-entri diagonal utama $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Secara umum, ilmu Aljabar membahas tentang himpunan dan sifat-sifat dari himpunan. Salah satu himpunan yang banyak dipelajari adalah himpunan matriks. Matriks merupakan suatu susunan dalam bentuk persegi panjang dari bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom. Bilangan-bilangan disusun berdasarkan baris dan kolom disebut sebagai entri dari matriks (Anton, 1987).

Matriks memiliki berbagai macam jenis, salah satu jenis matriks yang sering digunakan dalam berbagai penelitian adalah matriks diagonal. Matriks diagonal merupakan salah satu bentuk matriks persegi dengan semua entri diluar diagonal utamanya nol dan paling tidak satu entri pada diagonal utamanya tidak sama dengan nol. Jika suatu matriks berbentuk diagonal, maka entri diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen dari matriks (Hengki dkk., 2015). Matriks diagonal juga bermanfaat dalam mencari determinan matriks, determinan matriks pada matriks diagonal adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama matriks, sehingga dapat mempermudah pencarian nilai determinan itu (Kinanti dkk., 2014).

Proses memperoleh matriks diagonal dapat dilakukan dengan diagonalisasi matriks. Diagonalisasi matriks merupakan suatu proses terhadap matriks persegi A untuk mencari matriks diagonal yang similar terhadap matriks A (Strang, 2006). Sebuah matriks persegi dikatakan dapat didiagonalisasikan apabila terdapat sebuah matriks *invertible* P sehingga $P^{-1}AP = D$ adalah matriks diagonal (Husni, 2022). Proses ini bertujuan transformasi suatu matriks persegi menjadi bentuk matriks diagonal melalui transformasi kesamaan (*similarity transformation*). Diagonalisasi matriks berkaitan dengan penerapan dari nilai eigen dan vektor eigen yang lebih memusatkan pada persoalan penentuan sebuah basis untuk ruang vektor yang terdiri vektor-vektor eigen sebuah matriks $A \in M_n$ yang telah ditentukan (Nurman dkk., 2019).

Pada proses diagonalisasi, suatu matriks umumnya mendiagonalisasi satu matriks. Dalam permasalahan yang melibatkan lebih dari satu matriks proses tersebut dilakukan dengan cara yang sama pada masing-masing matriks, sehingga memerlukan langkah perhitungan yang panjang dan waktu yang lebih lama. Untuk menyederhanakan proses tersebut digunakan pendekatan diagonalisasi simultan. Diagonalisasi simultan merupakan proses mencari suatu matriks *invertible* P yang transformasi dua matriks secara bersamaan menjadi matriks diagonal (Horn & Johnson, 2013). Sehingga, dengan menggunakan diagonalisasi simultan akan mempersingkat waktu perhitungan untuk mencari matriks diagonal. Akan tetapi, tidak semua pasangan dua matriks dapat didiagonalisasi secara simultan. Proses diagonalisasi secara simultan dapat dilakukan jika matriks A dan B yang saling komutatif. Sifat komutatif ini memiliki keterkaitan antara nilai eigen dan vektor eigen yang menjadi hal penting juga dalam proses diagonalisasi secara simultan.

Matriks memiliki berbagai operasi-operasi yang dapat dilakukan, antara lain penjumlahan, perkalian dengan skalar, dan perkalian matriks. Pada perhitungan diagonalisasi matriks secara simultan menggunakan operasi perkalian matriks, pada perkalian dua matriks yang saling komutatif. Secara umum, perkalian dua matriks hasilnya tidak selalu komutatif, apabila komutatif maka ada sifat-sifat yang dipenuhi. Dua matriks yang saling komutatif memiliki sifat-sifat khusus yang dipenuhi akan dapat didiagonalisasi secara simultan. Jika terdapat matriks A dan dapat didiagonalisasi dengan merekontruksi matriks B akan diperoleh bahwa matriks A dan B tersebut saling komutatif.

Oleh karena itu, dalam skripsi ini difokuskan pada permasalahan keterkaitan sifat komutatif dengan diagonalisasi secara simultan, yaitu menganalisis keterkaitan dua matriks yang saling komutatif dapat didiagonalisasikan secara simultan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat dari dua matriks yang saling komutatif dan keterkaitan dengan diagonalisasi secara simultan, bagaimana proses

diagonalisasi secara simultan pada dua matriks, dan bagaimana konstruksi matriks B yang komutatif dengan matriks A yang dapat didiagonalisasi.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, terdapat tujuan dari penelitan ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji sifat-sifat dari dua matriks yang saling komutatif dan kaitannya dengan diagonalisasi secara simultan.
2. Merumuskan proses diagonalisasikan secara simultan untuk dua matriks yang saling komutatif.
3. Mengonstruksi matriks B yang komutatif dengan suatu matriks A yang dapat didiagonalisasi.

1.4 Batasan Masalah

Agar penelitian ini lebih terarah terdapat batasan masalah dalam penelitian ini adalah dua matriks yang digunakan matriks persegi berdimensi hingga atas lapangan (*field*).

1.5 Tinjauan Pustaka

Pada teori dari buku ini dibahas dari buku oleh Roger A. Horn, dan Charles R. Johnson (2013) menyebutkan bahwa sifat-sifat matriks komutatif yang berkaitan dengan diagonalisasi secara simultan, dalam penelitian ini dijelaskan bahwa dua matriks dapat diagonalisasi secara simultan jika memenuhi syarat yang dimana kedua matriks yang saling komutatif, dan dapat didiagonalisasi. Untuk mendukung penelitian ini terdapat beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang sifat operasi komutatif dan diagonalisasi.

Buku tentang operasi dan sifat-sifat matriks yang dilakukan Howard Anton, dan Chris Rorres (2004) membahas operasi-operasi matriks beserta sifat-sifatnya, termasuk pada operasi perkalian dua matriks yang tidak selalu komutatif. Selanjutnya, penelitian Try Azisah Nurman, Nur Aeni, dan Sudarti Dahsan (2019) membahas tentang proses diagonalisasi secara simultan, yaitu jika matriks A dan B dengan berukuran yang sama dan keduanya komutatif, maka dapat didiagonalkan secara simultan.

Penelitian selanjutnya yang dilakukan oleh Fidiah Kinanti, Nilamsari Kusumastuti, dan Evi Noviani (2013) membahas diagonalisasi matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan yang menunjukkan syarat-syarat yang diperlukan agar suatu matriks dapat didiagonalisasi pada matriks atas ring komutatif dan proses dari diagonalisasi matriks. Selanjutnya, Heronimus Hengki, Helmi, dan Mariatul Kiftiah (2015) membahas proses diagonalisasi pada matriks kompleks, dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa proses diagonalisasi matriks kompleks untuk mencari matriks diagonal, dan proses tersebut juga sama caranya dengan diagonalisasi dari matriks *real*.

1.6 Metodologi Penelitian

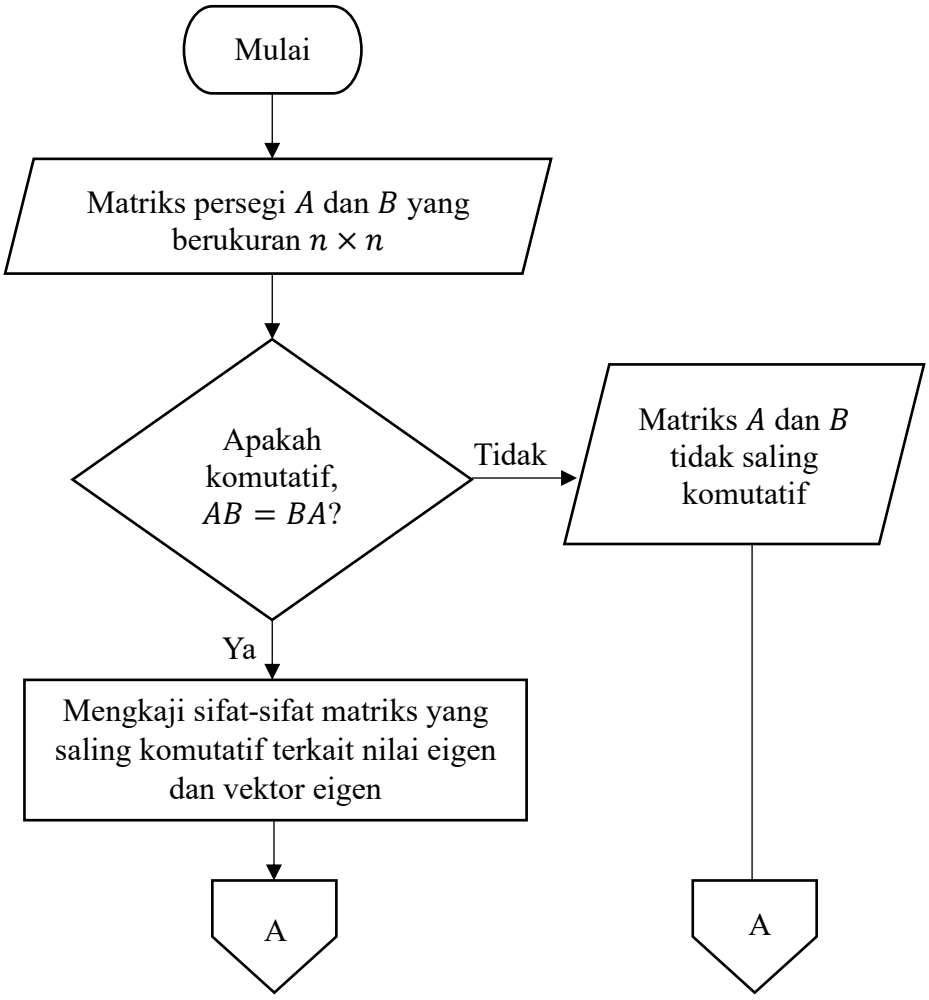
Metodologi yang digunakan pada penelitian ini diawali dengan melakukan studi literatur, yaitu memanfaatkan sumber kepustakaan yang terdapat di perpustakaan dan internet untuk memperoleh informasi penelitian tanpa melakukan riset lapangan dengan mengumpulkan beberapa literatur baik berupa buku maupun jurnal yang berkaitan dengan penelitian (Putri, 2019). Studi literatur yang dilakukan berhubungan dengan sifat-sifat matriks yang saling komutatif dan diagonalisasi secara simultan.

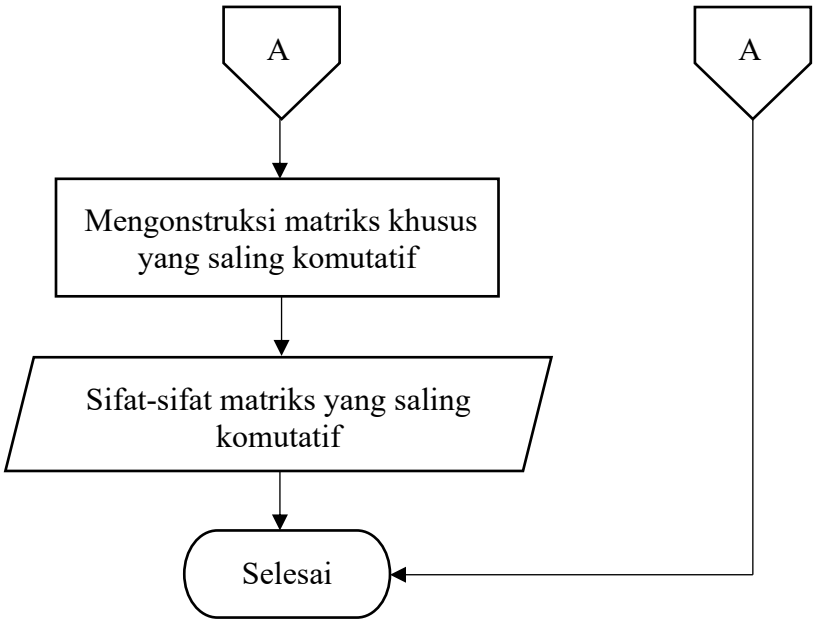
Langkah-langkah penelitian ini dilakukan terdiri atas tiga tahapan, yaitu mengkaji sifat-sifat matriks yang saling komutatif, lalu proses diagonalisasi dua matriks secara simultan, dan kontruksi matriks B dengan matriks A yang dapat didiagonalisasi. Tahapan pertama dimulai dengan menentukan dua matriks persegi berukuran $n \times n$, lalu periksa apakah dua matriks tersebut saling komutatif, jika iya maka lanjut mengkaji sifat-sifat matriks yang saling komutatif terkait nilai eigen dan vektor eigen, lalu diperoleh sifat-sifat matriks yang saling komutatif, dan mengonstruksi matriks khusus agar menghasilkan dua matriks yang saling komutatif.

Tahapan kedua dimulai dengan menentukan matriks persegi A dan B, lalu periksa apakah dua matriks tersebut saling komutatif, jika iya maka lanjut mencari nilai eigen pada kedua matriks dan vektor eigen pada matriks A, selanjutnya periksa vektor eigen bebas linear lalu dibentuk matriks P dengan kolom-kolomnya dari vektor basis ruang eigen, setelah mendapatkan matriks P dan P^{-1} akan dicari

matriks diagonal dari kedua matriks tersebut dengan menggunakan matriks P yang sama dengan $P^{-1}AP = D_1$ dan $P^{-1}BP = D_2$, dan diperoleh matriks diagonal D_1, D_2 pada matriks A dan B.

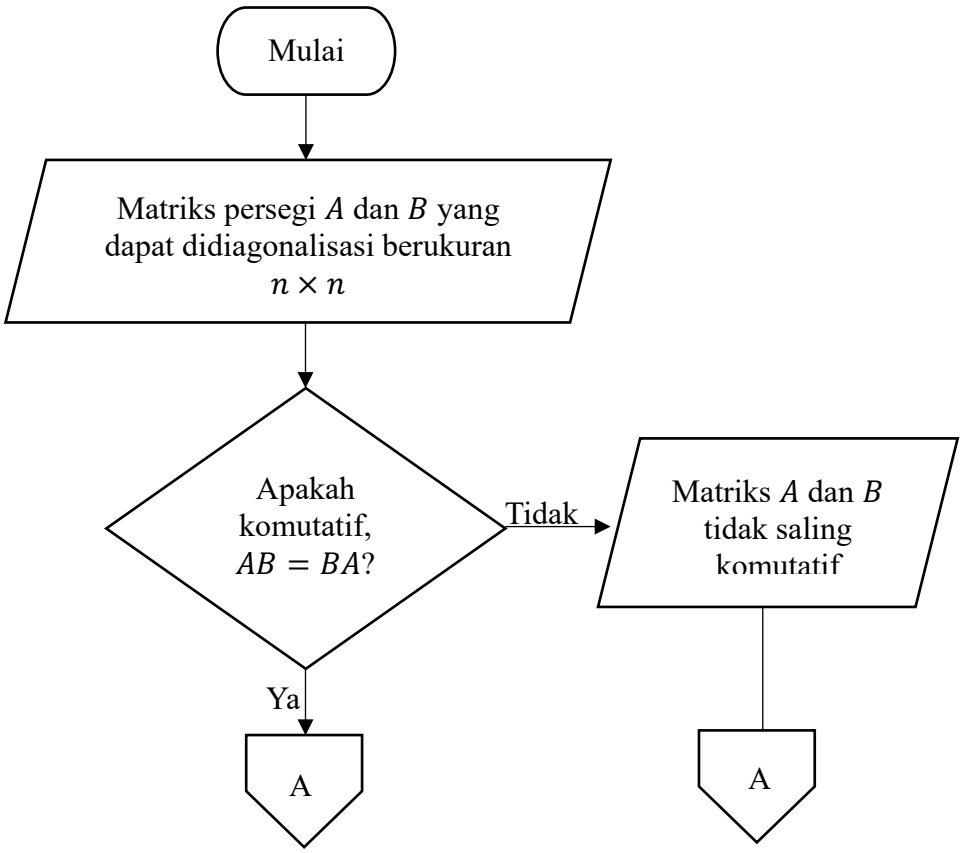
Tahapan ketiga dimulai dengan menentukan matriks persegi A yang dapat didiagonalisasi, selanjutnya mencari nilai eigen dan vektor eigen pada matriks A, lalu dibentuk matriks P dengan kolom-kolomnya dari vektor basis ruang eigen dan akan didapat matriks diagonal pada matriks A dengan $P^{-1}AP = D_1$, setelah mendapatkan matriks P dan P^{-1}, ambil sebarang nilai-nilai eigen pada entri-entri diagonal utama pada matriks diagonal D_2, akan dicari matriks B dengan matriks diagonal D_2 yang memenuhi $P^{-1}BP = D_2$, setelah mendapatkan matriks B periksa bahwa matriks A dan B yang saling komutatif, dan diperoleh matriks B yang komutatif dengan matriks A. Adapun diagram alir terkait proses pada tahapan pertama ini dapat dilihat pada Gambar 1.1.

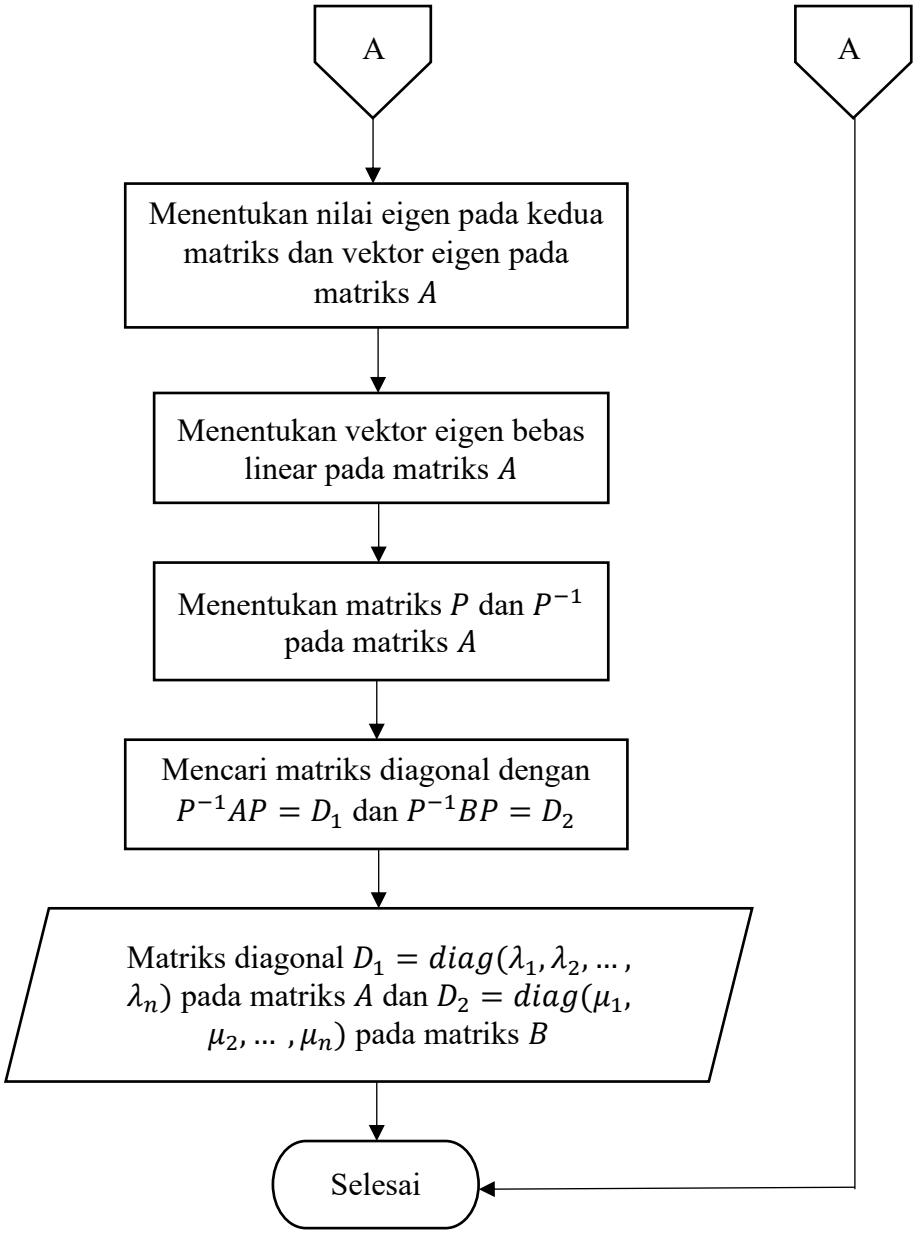




Gambar 1.1 Diagram Alir Sifat-Sifat Matriks yang Saling Komutatif

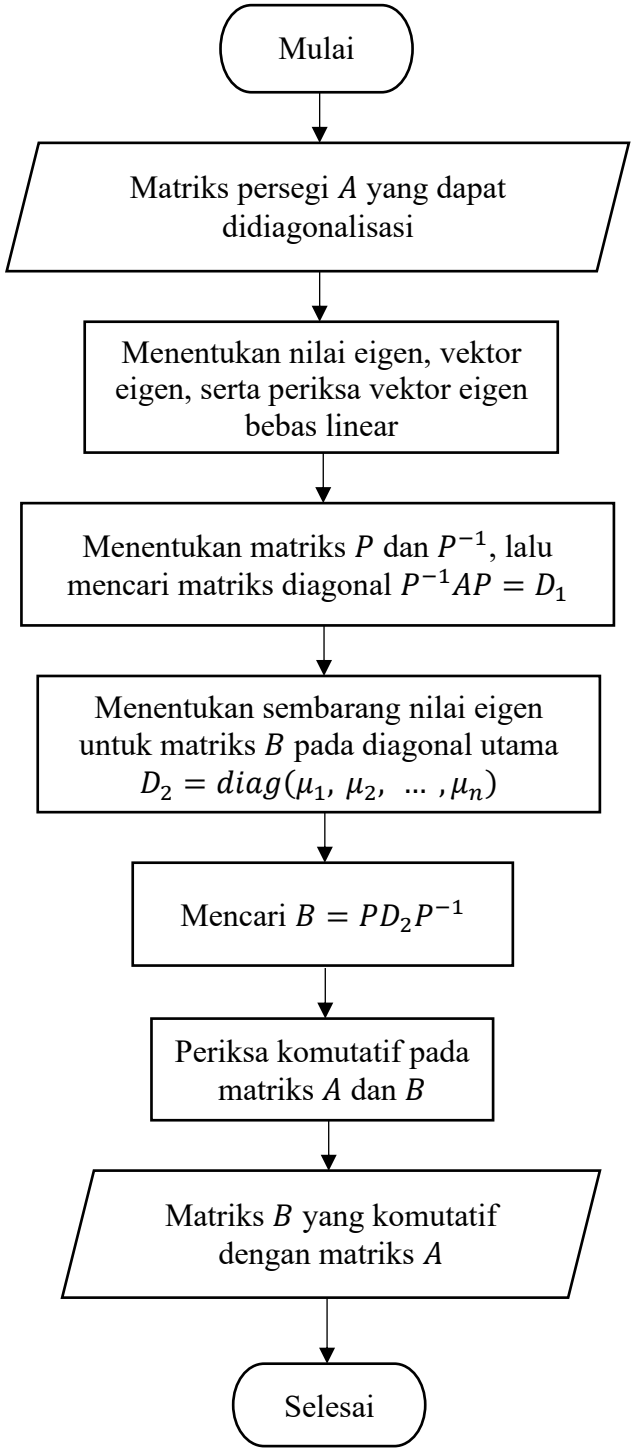
Untuk diagram alir terkait proses pada tahapan kedua ini dapat dilihat pada Gambar 1.2





Gambar 1.2 Diagram Alir Diagonalisasi Secara Simultan

Selanjutnya untuk diagram alir terkait proses pada tahapan ketiga ini dapat dilihat pada Gambar 1.3.



Gambar 1.3 Mengonstruksi Matriks B yang Komutatif dengan Matriks A yang Dapat Didiagonalisasi